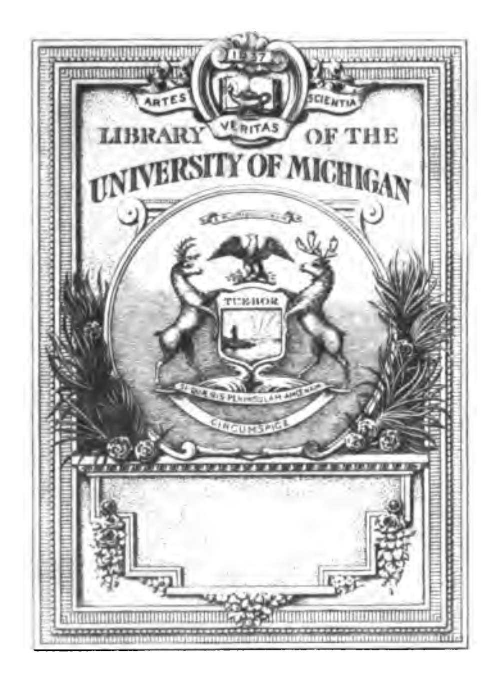
l. Bicquilley



[illegible]

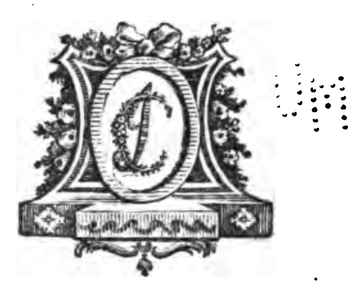
[illegible]. Bicquilley

DU CALCUL *DES* PROBABILITÉS.

DU CALCUL
DES
PROBABILITÉS.

NOUVELLE ÉDITION.

PAR C. F. BICQUILLEY.



A TOUL,

Chez JOSEPH CAREZ, Imprimeur-Libraire;

Et se vend à PARIS,

Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins.

1783.

PRÉFACE.

L'ANALYSE & la Géométrie sont reconnues pour les seuls guides qui puissent nous conduire sûrement à la vérité ; l'application qui en a été faite de nos jours à divers objets des connoissances humaines, a considérablement affoibli le regne de l'opinion : les sciences exactes ont succédé aux spéculations vagues, & quelques vérités certaines à une multitude de préjugés aveugles & d'ingénieuses erreurs. Il y a lieu d'espérer que le Génie ne s'arrêtera pas dans sa course, & que la méthode du calcul pourra s'étendre un jour aux objets qui nous en paroissent le moins susceptibles, & sur lesquels il nous importe le plus d'acquérir des notions assurées. Les épreuves tentées sans succès ne prouvent que la difficulté du projet; elles peuvent même ouvrir la voie à des efforts plus heureux, en éclairant les écueils qui ont causé les premiers naufrages.

Nous ne pouvons toutefois nous dissimuler que la faculté humaine a des bornes qui lui sont assignées par la nature, & qu'il est des objets, même d'une importance majeure, sur lesquels nous serons à jamais réduits au doute & à la seule vraisemblance : mais la vraisemblance, ou la probabilité est susceptible de plus est de moins : elle a toutes les qualités qui caractérisent la grandeur, des rapports d'égalité & d'inégalité, des termes de *Maximum*

& de *Minimum*, qui ſont la certitude abſolue d'une part, & l'impoſſibilité reconnue d'autre : elle eſt donc du reſſort de la Géométrie, & ſa quantité peut être évaluée par le calcul.

La théorie des Probabilités ébauchée par des Géometres célebres m'a paru ſuſceptible d'être approfondie, & de faire partie de l'enſeignement élémentaire : j'ai penſé qu'un traité ne feroit point indigne d'être offert au public, qui pourroit enrichir de nouvelles vérités cette matiere intéreſſante, & la mettre à la portée du plus grand nombre des lecteurs.

Ce livre eſt diviſé en ſept chapitres : Dans le premier, les principes fondamentaux ſont précédés de définitions exactes du *certain*, du *poſſible* & de l'*impoſſible*, du *probable* & autres expreſſions de même eſpece plus fréquemment employées que bien conçues. Les trois ſuivants renferment une théorie analytique de la plus grande généralité, dans laquelle j'ai tâché de réunir la méthode, la briéveté & la clarté ; appliquant chaque propoſition à quelques exemples qui puiſſent à-la-fois éclaircir le principe & en indiquer les uſages.

Le cinquieme chapitre montre, par des exemples particuliers, l'application qui peut ſe faire de la théorie établie par les précédents, pour réſoudre les queſtions relatives à la plupart des jeux, & la maniere d'appliquer à la recherche

des probabilités les principes de la géométrie élémentaire ou tranſcendante, lorſque les queſtions propoſées en ſont ſuſceptibles. Le ſixieme chapitre établit démonſtrativement la maniere de ſuppléer à l'analyſe par l'expérience, dans la recherche des probabilités, lorſque les queſtions propoſées ne ſont pas de nature à être ſoumiſes à un calcul exact. Le ſeptieme eſt un eſſai ſur le moyen d'eſtimer l'influence que peuvent avoir ſur la probabilité des faits, les témoignages rendus pour ou contre ces faits.

Je ſuis extrêmement éloigné de prétendre avoir porté la connoiſſance des probabilités au degré de perfection où le génie & l'expérience pourront l'élever un jour : mais quoique les eſſais d'un amateur ne puiſſent entrer en comparaiſon avec les chefs-d'œuvre des maîtres; on ne jugera pas mon travail inutile, ſi j'ai fait quelques pas dans la carriere, & concouru au progrès de l'art de conjecturer, & d'aſſujettir l'incertitude à des regles certaines.

FAUTES A CORRIGER.

Page 2 §. *III*, *ligne* 2, états des choſes, *liſez* états de choſes.
Page 6, §. *XI*, *ligne* 8, 1 : 6. *liſez* 1 : 5.
Page 11, §. *XXV*, *dans la derniere accolade*, *mettez le trait qui eſt entre le* p *&* *l's*, *entre le* q *& le* p.
Page 73, §. *XCIV*, *ligne* 9, tons, *liſez* tous.
Page 135, *ligne* 8, proportions, *liſez* propoſitions.
Page 151, §. *CLXIX*, *ligne* 5, $\frac{a}{b}$ exprimera, *liſez* $\frac{b}{a}$ exprimera.

TABLE
DES
CHAPITRES.

Fin de la Table.



DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

CHAPITRE I.

Définitions, Notions, & Principes fondamentaux.

§. I.

PARMI les divers mouvements, actions, ou états de choſes qui ſont ſous nos yeux, il en eſt dont nous ſommes en état d'aſſigner avec certitude le réſultat, la conſéquence ou l'effet; ſoit d'après des expériences multipliées d'autres mouvements, actions, ou états de choſes ſemblables; ſoit d'après une connoiſſance raiſonnée des loix qui les dirigent : ces effets, conſéquences, ou réſultats ſe nomment *Certains*.

I I.

Il est d'autres mouvements, actions, ou états de choses dont nous ne sommes pas en état d'assigner avec certitude les résultats, conséquences, ou effets : ces sortes de résultats, conséquences, ou effets se nomment *Hazards*.

I I I.

Entre les divers mouvements, actions, ou états des choses dont nous ne sommes pas en état d'assigner avec certitude la conséquence ou l'effet, il en est auxquels nous sommes en état d'assigner divers résultats que nous nommons *Possibles*; entre lesquels nous sommes assurés que l'effet ignoré se trouve, & hors desquels nous sommes également assurés que cet effet ne se trouve point.

Pour rendre ceci sensible par un exemple, supposons que Pierre agite dans un cornet deux dés à jouer ordinaires pour les projetter aveuglément sur une table : j'ignore le résultat de cet acte ; c'est-à-dire, le point qui sera amené par Pierre : mais je sais qu'il y a 36 résultats que je nomme possibles, parmi lesquels je suis certain que ce point se trouve, & hors desquels je suis aussi certain que ce point ne se trouve pas; car le dé *A* peut amener six points différents ; & à chaque point amené par le dé *A*, le dé *B* peut amener six points différents : d'où je vois que le jet de deux dés à jouer ordinaires a 6 fois 6 ou 36 résultats possibles, & qui sont les seuls possibles.

I V.

J'appelle deux ou plusieurs résultats *également possibles*, lorsqu'il n'y a aucune raison qui me fasse espérer l'événement de l'un plus que l'événement de l'autre.

Ainsi dans le jet de deux dés, le point 5 & 4 & le point 3 & 1 sont également possibles, parce qu'ils peuvent être amenés chacun de deux manieres; savoir, le 1r. lorsque le dé *A* amene 5, & le dé *B*, 4; & lorsque le dé *A* amene 4 & le dé *B*, 5 : le 2e. lorsque le dé *A* amene 3 & le dé *B*, 1; & lorsque le dé *A* amene 1, & le dé *B*, 3.

Le point 5 & 4 & le point terne ne sont pas également possibles, parce que le 1r. peut être, comme on vient de voir, amené de deux manieres : au lieu que le 2e. ne peut être amené que d'une seule maniere; savoir, quand chaque dé amene le point 3.

Le point 6 & le point 8 sont également possibles, parce qu'ils peuvent tous deux être amenés de cinq manieres; savoir, le point 6 par 5 & 1, 4 & 2, 3 & 3, 2 & 4, 1 & 5 : & 8 par 6 & 2, 5 & 3, 4 & 4, 3 & 5, 2 & 6.

Le point 7 & le point 8 sont inégalement possibles : parce que le point 7 peut être amené de six maniéres différentes; savoir, par 6 & 1, 5 & 2, 4 & 3, 3 & 4, 2 & 5, 1 & 6; au lieu que le point 8 ne peut être amené que de cinq manieres, comme on vient de le voir.

V.

Nous appellerons *Chances* tous les résultats également possibles parmi lesquels on est assuré qu'un hazard désigné se trouve, & hors desquels on est assuré qu'il ne se trouve pas : ainsi dans le jet de deux dés, il y a trente-six *Chances* parmi lesquelles se trouvent tous les hazards qui peuvent en résulter.

VI.

Il suit de cette définition des *Chances*, que lorsque dans le calcul des hazards, on voudra évaluer la somme de la totalité ou d'une partie quelconque

des *Chances* dont ces hazards font partie ; il faudra toujours avoir attention à ce que les résultats dont on fera l'énumération soient tous également possibles.

VII.

On peut conclure des définitions ci-dessus, qu'il n'y a point de hazard absolu ; que ce mot est relatif à l'ignorance de celui qui l'emploie : & comme tout se meut dans la nature suivant des loix constantes & des forces données qui déterminent le résultat de tout acte, mouvement, ou état de choses ; il n'y auroit point de hazard, & tout seroit certain pour l'être intelligent qui connoîtroit parfaitement ces loix.

On peut dire la même chose de la Possibilité, qui n'est point une qualité intrinseque aux faits appellés possibles, mais seulement l'expression de l'ignorance où nous sommes si ces faits ont existé ou n'ont pas existé, s'ils existent ou s'ils n'existent pas, s'ils existeront ou s'ils n'existeront pas. En attachant à l'idée de la possibilité d'un fait celle d'une cause capable de le faire exister, on tomberoit dans une erreur manifeste ; car une véritable cause ne peut exister sans son effet, & dans cette supposition, il n'y auroit rien de possible que ce qui existe réellement.

VIII.

Nous nous déterminons fréquemment dans la conduite de la vie sur la supposition de faits ou événements dont nous ne sommes pas en état d'affirmer la réalité avec certitude, & qui relativement à nous sont seulement possibles : la supposition que nous faisons que ces faits ont existé, qu'ils existent, ou qu'ils existeront, se nomme *Présomption* ou *Conjecture* : ainsi présumer ou conjecturer,

eſt ſuppoſer réel un fait qui relativement à nous n'eſt que poſſible, au-riſque de nous tromper ſi la ſuppoſition ſe trouve fauſſe, & de manquer le but que nous nous ſommes propoſé en la faiſant.

I X.

Un *Pari* ou *Gageure* eſt un contrat par lequel deux parties engagent chacune reſpectivement une ſomme d'argent déterminée, l'une à l'exiſtence, l'autre à la non-exiſtence d'un événement poſſible ſpécifié.

Par exemple : Si Pierre agitant dans un cornet deux dés à jouer, pour les jetter ſur une table, s'engage à payer un écu à Paul, au cas où il ameneroit Doublet : & que Paul s'engage réciproquement à payer 15 l. à Pierre, s'il amene un point ſimple : cette convention eſt un pari.

X.

La *Probabilité* d'un hazard eſt le rapport du nombre des chances qui donnent ce hazard, au nombre total des chances dont ce même hazard fait partie.

Par exemple : Dans le jet de deux dés à jouer ordinaires :

La probabilité du point 12 eſt $\frac{1}{36}$:

Celle du point 11 eſt $\frac{2}{36}$ ou $\frac{1}{18}$:

Celle du point 10, $\frac{3}{36}$, ou $\frac{1}{12}$:

Celle du point 9, $\frac{4}{36}$, ou $\frac{1}{9}$:

Celle du point 8, $\frac{5}{36}$: Celle du point 7, $\frac{6}{36}$, ou $\frac{1}{6}$:

Celle de Quine $\frac{1}{36}$: Celle de 5 & 4, $\frac{2}{36}$, ou $\frac{1}{18}$:

Celle de Doublet, $\frac{6}{36}$, ou $\frac{1}{6}$:

Celle de Point-ſimple, $\frac{30}{36}$, ou $\frac{5}{6}$:

Parce que dans les 36 chances dépendantes du jet des deux dés, il y en a 1 qui donne le point 12; 2 qui donnent 11; 3 qui donnent 10; 4 qui donnent 9; 5 qui donnent 8; 6 qui donnent 7; 1 qui donne Quine; 2 qui donnent 5 & 4; 6 qui donnent Doublet; & 30 qui donnent Point-ſimple.

X I.

Il ſuit des Définitions précédentes, que les Probabilités des divers hazards dépendants d'un acte, mouvement ou état de choſes donné, ſont entre elles comme les nombres de chances qui les donnent :

Par exemple : Dans le jet de deux dés, la probabilité du Doublet eſt à celle du point ſimple, comme 6 eſt à 30, ou :: 1 : 5.

X I I.

En général : ſoit $\frac{n}{m}$ la probabilité d'un hazard : cette probabilité devient d'autant $\left\{\begin{matrix}\text{plus grande}\\\text{moindre}\end{matrix}\right.$, que n $\left\{\begin{matrix}\text{augmente}\\\text{diminue}\end{matrix}\right.$, le dénominateur m reſtant le même : & ſi $n = m$, ou $\frac{n}{m} = 1$, l'événement eſt certain; parce que dans ce cas, toutes les chances donnent l'événement : & ſi $n = o$, ou $\frac{n}{m} = o$, l'événement eſt impoſſible, ou ce qui eſt de même, la non-exiſtence de cet événement eſt certaine.

X I I I.

Il ſuit de-là que la probabilité ne peut jamais être plus grande que l'unité, ni moindre que o;

c'eſt-à-dire, négative : mais qu'elle peut paſſer par toutes les valeurs & les degrés de la grandeur, intermédiaires entre *o* & *1*.

X I V.

NOMMANT toujours $\frac{n}{m}$, la probabilité d'un hazard, $\frac{m-n}{m}$ eſt la probabilité contraire; c'eſt-à-dire, la probabilité que ce hazard n'aura pas lieu : ce qui eſt évident; car *n* repréſentant le nombre des chances qui donnent ce hazard, *m - n* eſt viſiblement le nombre des chances qui ne le donnent point.

X V.

LA probabilité d'un hazard quelconque étant ajoutée à la probabilité contraire, donne toujours l'unité pour ſomme; car $\frac{n}{m} + \frac{m-n}{m} = 1$; ce qui eſt d'ailleurs évident, puiſqu'il eſt toujours certain qu'un hazard quelconque arrivera ou n'arrivera pas.

X V I.

UNE ſorte de mouvement ou d'action qui a pluſieurs réſultats poſſibles, peut être réitérée deux, trois, quatre, ou un plus grand nombre de fois. Nous appellerons *Épreuves* chacune de ces répétitions.

Par exemple : Si dans un ſac qui renferme 90 boules mêlées & marquées chacune d'un numéro différent, telles que celles qu'on emploie dans le jeu de Loto, je prends aveuglément & ſans choix cinq de ces boules, les remettant enſuite dans le ſac, & que je réitere pluſieurs fois cette action; ces répétitions ſe nommeront *Épreuves*.

XVII.

La probabilité d'un fait eſt auſſi celle de la propoſition qui affirme ce fait : de maniere qu'un fait & la propoſition qui en affirme l'exiſtence, ſont plus ou moins probables, ou croyables, ou vraiſemblables, ſelon que le rapport du nombre des chances qui donnent ce fait au nombre total des chances dont il fait partie, s'approche ou s'éloigne plus de l'unité. Il faut toutefois ſe ſouvenir que la vérité & la fauſſeté des faits & des propoſitions qui les affirment ne ſont néceſſairement déterminées par la probabilité, que dans les ſeuls cas où la probabilité égale o ou 1; hors de là, la probabilité ne conclut rien à la rigueur ſur la réalité des événements, & le moins probable eſt quelquefois celui qui arrive : il eſt cependant certain que la fréquence des retours des mêmes faits dans une multitude d'épreuves, eſt à peu près proportionnelle à la probabilité de ces faits; que les conjectures nous expoſent d'autant moins à l'erreur, & nous trompent d'autant plus rarement que les faits préſumés ſont plus probables.

XVIII.

On nomme *Pari équitable*, le pari dans lequel les miſes ou ſommes engagées par les Parieurs, ſont entr'elles comme les probabilités des hazards à la réalité deſquels ces ſommes ſont engagées.

Ainſi, ſuppoſant que Pierre parie une ſomme s pour un hazard dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$; la miſe de Paul qui parie que cet événement n'aura pas lieu, doit, pour que le pari ſoit équitable, être $s \, . \, \frac{m-n}{n}$: car nommant x la miſe de Paul, on aura cette proportion; la probabilité du hazard pour le-

quel Pierre parie, eſt à la probabilité du hazard pour lequel Paul parie, comme la miſe de Pierre eſt à la miſe de Paul : ou ce qui eſt de même, $\frac{n}{m} : \frac{m-n}{m} :: s : x$; d'où l'on déduit $x = s . \frac{m-n}{n}$.

X I X.

Dans le cas du pari équitable, la miſe d'un des parieurs, & la probabilité d'un des hazards étant données, on peut en déduire aiſément la miſe de l'autre parieur, & la probabilité de l'autre hazard. Ainſi, ſi la probabilité du hazard pour lequel Pierre parie eſt $\frac{1}{6}$, & la miſe de Paul 15 l.; la probabilité de l'événement pour lequel Paul parie ſera $\frac{5}{6}$, & la miſe de Pierre 3 l.

X X.

Dans un pari équitable; ſi la probabilité de chaque hazard eſt $\frac{1}{2}$, les miſes doivent être égales; & réciproquement ſi la probabilité eſt $\frac{1}{2}$, & les miſes égales, le pari eſt équitable.

X X I.

Remarquez que l'équité d'un pari ſuppoſe que les probabilités des hazards qui ſont l'objet du pari, ſont également évaluées par les parieurs : autrement l'équité ſeroit détruite, même au moral; & elle le ſeroit au plus haut point, ſi l'un des parieurs étoit certain de l'événement pour lequel il parie.

X X I I.

Remarquez encore que cette équité numérique

des paris emporte rarement égalité d'avantages & de désavantages physiques aux parieurs; parce que les avantages & désavantages physiques attachés à tels gains ou à tels pertes, sont, dans la condition humaine, rarement proportionnels aux sommes gagnées ou perdues. Un homme, par exemple, dont la fortune se borneroit à 10000 l. qui suffiroient à tous ses besoins, joueroit avec un extrême désavantage, quoiqu'à jeu égal, cette somme contre un millionnaire pour qui le gain ou la perte de cette somme sont presque de nulle conséquence, vu qu'il ne peut se trouver compensation de commodité & d'incommodité entre l'acquisition du superflu & la perte du nécessaire; le pari ne pourroit donc devenir équitable, dans ce sens, que dans le cas tout au plus où les parieurs seroient dans des positions de fortunes égales, & où leur bien-être seroit indépendant des sommes engagées au pari.

XXIII.

On nomme Probabilité composée celle qui est le produit de plusieurs autres probabilités: ainsi la probabilité $\frac{nqsu}{mprt}$ est composée des probabilités $\frac{n}{m}$, $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{r}$, $\frac{u}{t}$.

XXIV.

Théoreme. Deux actes, mouvements ou états de choses différents étant donnés; du premier, desquels dépend un hazard, dont la probabilité est $\frac{n}{m}$, & du second, desquels dépend un hazard dont la probabilité est $\frac{q}{p}$; je dis que la probabilité que

ces hazards arriveront tous deux est composée des probabilités de ces deux hazards, c'est-à-dire, que cette probabilité est $\frac{nq}{mp}$.

DÉMONST. 1°. Chacune des m chances dont le premier hazard fait partie, peut arriver avec chacune des p chances dont le second hazard fait partie; ainsi le nombre des chances, dont le concours des deux hazards fait partie, est mp. 2°. Chacune des n chances qui donnent le premier hazard peut arriver avec chacune des q chances qui donnent le second hazard : ainsi le nombre des chances qui donnent à la fois les deux hazards, est nq; donc la probabilité que les deux hazards arriveront, est $\frac{nq}{mp}$. (*X.*) *C. Q. F. D.*

XXV.

COROLL. I. Étant donnés 3, 4, 5, ou un plus grand nombre d'actes, mouvements ou états de choses différents, du

$\left\{\begin{array}{l} 1^{er}. \\ 2^{e}. \\ 3^{e}. \\ 4^{e}. \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$ desquels dépend un hazard dont la probabilité est

$\left\{\begin{array}{l} \frac{n}{m} \\ \frac{q}{p} \\ \frac{s}{r} \\ \frac{u}{t} \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$; Je dis que la probabilité du concours de tous ces hazards est composée de toutes leurs

probabilités particulieres : c'est-à-dire, qu'elle est $\frac{nqsu\ldots}{mprt\ldots}$.

Car la probabilité du concours des deux premiers hazards est, comme on vient de voir, $\frac{nq}{mp}$; ainsi la probabilité du hazard naissant du concours des deux premiers hazards, & la probabilité du troisieme hazard, c'est-à-dire, $\frac{nq}{mp}$ & $\frac{s}{r}$ sont les deux probabilités composantes de celle du concours des trois premiers hazards, qui par conséquent sera $\frac{nqs}{mpr}$: on prouvera de même que la probabilité que le hazard formé par le concours des trois premiers hazards, & le quatrieme hazard arriveront, est $\frac{nqs}{mpr} \cdot \frac{u}{t}$ ou $\frac{nqsu}{mprt}$; ainsi de suite.

XXVI.

Coroll. II. Étant donné un nombre *N*, d'actes, mouvements, ou états de choses semblables, desquels dépendent divers hazards dont les probabilités sont $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, $\frac{q}{m}$ .... au nombre *N* : la probabilité que le $\left\{\begin{matrix} 1^{er}. \\ 2^{e}. \\ 3^{e}. \\ \ldots \end{matrix}\right.$ de ces actes amenera le hazard dont la probabilité est $\left\{\begin{matrix} \frac{n}{m} \\ \frac{p}{m} \\ \frac{q}{m} \\ \ldots \end{matrix}\right.$, est $\frac{npq\ldots}{m^N}$:

& si $n = p = q = \ldots\ldots$; la probabilité du concours de tous ces hazards est $\left(\frac{n}{m}\right)^N$.

XXVII.

Exemples. Pierre, Jacques & Jean jettent chacun sur une table deux dés à jouer ordinaires : la probabilité que Pierre amenera un Doublet, Jacques un Point simple, & Jean le Point 7, est $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$ ou $\frac{5}{216}$.

Je jette quatre fois de suite sur une table deux dés à jouer ordinaires; la probabilité que j'amenerai toutes les quatre fois un Doublet, est $\frac{1}{6^4}$ ou $\frac{1}{1296}$: celle d'amener toutes les quatre fois Sonnet, est $\frac{1}{36^4}$ ou $\frac{1}{1679616}$.

XXVIII.

Les actes, mouvements ou états de choses desquels dépendent les hazards dont on cherche la probabilité, sont nommés les causes ou les signes de ces hazards, selon qu'ils peuvent être présumés ou les produire ou les accompagner : au premier cas, les hazards se nomment *Effets*, au second cas, ils se nomment *choses signifiées*. Dans l'un & l'autre cas, la certitude de l'existence de la cause ou du signe peut seule laisser à l'effet ou la chose signifiée le degré de probabilité qui lui est propre : ainsi, la probabilité que Pierre amenera Sonnet, n'est $\frac{1}{36}$, que dans le cas où il est certain que Pierre jettera deux dés à jouer sur une table : & la probabilité que Pierre amenera Sonnet, n'est $\frac{1}{6}$, que dans le cas où il est certain que Pierre amenera

un Doublet; réciproquement la certitude de l'existence de l'effet ou signification peut seule laisser à la cause ou signe le degré de probabilité qui lui est propre : mais si la cause ou signe est incertain d'une part; que d'autre part l'effet ou signification soit encore incertain, alors la probabilité de l'existence simultanée de la cause & de l'effet, ou du signe & de la chose signifiée, est composée des probabilités particulieres de la cause & de l'effet ou du signe & de la chose signifiée; c'est-à-dire, le produit de ces probabilités particulieres.

Ainsi, nommant $\frac{n}{m}$ la probabilité que Pierre jettera deux dés à jouer sur une table : la probabilité qu'il amenera un doublet, est $\frac{n}{6m}$; & la probabilité que ce Doublet sera Sonnet, est $\frac{n}{m} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ ou $\frac{n}{36m}$.

XXIX.

Comme les nombres nommés *Ordinaux* sont d'un très-fréquent usage, tant dans la Théorie que dans la Pratique du Calcul des Probabilités, nous avons cru utile & commode pour les lecteurs de donner ici une notice abrégée de ces sortes de nombres : c'est l'objet des Propositions suivantes.

XXX.

L'unité répétée indéfiniment forme une suite de nombres qu'on nomme *Premiers* ou *Constants*. Ainsi

1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.

est la suite des nombres *Premiers* ou *Constants*.

Si sous chacun des nombres premiers j'écris la

somme de ce nombre & de tous ceux qui le précedent vers la gauche, j'aurai la suite

1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.

qui est celle des nombres *Seconds* ou *Naturels*.

Si sous chacun des nombres Seconds ou Naturels, j'écris la somme de ce nombre & de tous les nombres Naturels qui le précedent vers la gauche, j'aurai la suite

1, 3, 6, 10, 15, 21, &c.

qui est celle des nombres *Troisiemes* ou *Triangulaires*.

Si sous chacun des nombres Troisiemes on écrit la somme de ce nombre & de tous ceux qui le précedent vers la gauche, j'aurai la suite

1, 4, 10, 20, 35, 56, &c.

qui est celle des nombres *Quatriemes* ou *Pyramidaux*.

Si sous chacun des nombres Pyramidaux, j'écris la somme de ce nombre & de tous ceux qui le précedent vers la gauche, j'aurai la suite

1, 5, 15, 35, 70, 126, &c.

qui est celle des nombres *Cinquiemes*.

En suivant la même génération de nombres, on trouvera successivement la suite des nombres *Sixiemes*, celle des nombres *Septiemes*, &c. ainsi de suite.

Les nombres formés de cette maniere se nomment en général *Nombres Ordinaux*.

XXXI.

Coroll. Il suit de cette définition qu'un nombre ordinal, dont le rang dans sa suite est marqué par n, & l'ordre entre les suites par m, est égal à la

XXXV.

Coroll. La somme des premiers nombres ordinaux de l'ordre m, pris au nombre n, est

$$\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}\ldots\ldots\overline{n+m-1}}{1.2\ldots\ldots\ldots\overline{m-1}.m};\ (\text{XXXI.})$$

Par ex. La somme des quatre premiers nombres triangulaires est $\frac{4.5.6}{1.2.3}$, ou 20 : la somme des 25 premiers nombres de l'ordre huitieme, est $\frac{25.26.27\ldots\ldots31.32}{1.2.3.4.5.6.7.8}$ ou 10518300. la somme des treize premiers nombres de l'ordre douzieme, est $\frac{13.14.15\ldots\ldots24}{1.2\ldots\ldots11.12}$ ou 2704156.

XXXVI.

Remarque III. Si l'on divise successivement l'unité par

$$\left\{\begin{array}{ll} 1-x\ , & \text{ou } \overline{1-x}^{1} \\ 1-2x+x^2, & \text{ou } \overline{1-x}^{2} \\ 1-3x+3x^2-x^3, & \text{ou } \overline{1-x}^{3} \\ & \overline{1-x}^{4} \\ & \ldots\ldots \\ & \overline{1-x}^{m} \end{array}\right.$$

; l'on trouvera pour quotient la suite infinie

$$\left\{\begin{array}{l}
1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \&c. \\
1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \&c. \\
1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \&c. \\
1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + \&c. \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
1 + mx + \frac{m.\overline{m+1}}{1.2}.x^2 + \frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}}{1.2.3}.x^3 + \&c.
\end{array}\right.$$

d'où l'on voit qu'en général la suite infinie

$$1 + mx + \frac{m.\overline{m+1}}{1.2}.x^2 + \frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}}{1.2.3}.x^3 + \&c. = \frac{1}{\overline{1-x}^m}.$$ ou autrement

si on multiplioit par une quantité x moindre que l'unité, tous les termes à l'infini de la suite des nombres ordinaux de l'ordre m, savoir chacun des termes par la puissance de x du dégré indiqué par le rang que ce terme a dans la suite, moins 1; la somme de tous ces termes seroit le quotient de l'unité divisée par la puissance du degré m de la quantité $1-x$.

XXXVII.

Probleme II. Trouver l'expression générale en m, n, p, de la somme des premiers nombres ordinaux de l'ordre m, pris au nombre n, & élevés chacun à la puissance du degré marqué par $p+1$.

Sol. Pour abréger les calculs, j'exprimerai, par

$$\left\{\begin{array}{l}
\int n \\
\int n^2 \\
\int n^3 \quad \text{la somme des } n \text{ premiers nombres naturels} \\
\dots\dots \\
\int n^{p+1}
\end{array}\right.$$

élevés chacun à la puissance du degré

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \ldots\ldots \\ \overline{p+1} \end{array}\right.$$; & par conséquent, par

$$\left\{\begin{array}{l} \int\left(\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}\right)^1,\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}\right)^2,\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}\right)^3,\ \&c. \\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\right)^1,\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\right)^2,\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\right)^3,\ \&c. \\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.2.3.4}\right)^1,\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.2.3.4}\right)^2 \&c. \\ \&c. \end{array}\right.$$

la somme des n premiers nombres

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Triangulaires}, \\ \text{Pyramidaux}, \\ \text{Cinquiemes}, \\ \&c. \end{array}\right.$$ élevés chacun à la puissance

1e, 2e, 3e, &c. Cela posé :

1°. $\int n = \frac{n.\overline{n+1}}{1.2}$, (XXXIV & XXXV).

$\int\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}$ ou $\int\frac{n^2}{2} + \int\frac{n}{2}$ ou $\int\frac{n^2}{2} + \frac{n.\overline{n+1}}{1.2.2}$

$= \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}$; donc

2°. $\int n^2 = -\frac{n.\overline{n+1}}{2} + \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{3}$;

$\int\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}$ ou $\int\frac{n^3}{6} + \int\frac{n^2}{2} + \int\frac{n}{3}$ ou

$$\int \frac{n^3}{6} + \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{6} - \frac{n.\overline{n+1}}{4} + \frac{n.\overline{n+1}}{6} =$$

$$\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\ ;\ \text{donc}$$

$$3^{o}.\quad \int n^3 = \frac{n.\overline{n+1}}{2} - 3\,\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{3} +$$

$$\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{4}.$$

On trouvera en procédant de même

$$4^{o}.\quad \int n^4 = -\frac{n.\overline{n+1}}{2} + 7\,\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{3}$$

$$-\,6\,\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{4} + \frac{n.\overline{n+1}\ldots\overline{n+4}}{5};$$

ainsi de suite. Et faisant pour abréger

$$a = \frac{n.\overline{n+1}}{2},$$

$$b = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{3},$$

$$c = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{4},$$

$$d = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}.\overline{n+4}}{5},$$

ainsi de suite : on trouvera successivement

$$\int n = +a,$$
$$\int n^2 = -a + b,$$
$$\int n^3 = +a - 3b + c,$$
$$\int n^4 = -a + 7b - 6c + d,$$
$$\int n^5 = +a - 15b + 25c - 10d + e;$$

ainsi de suite : & en général

$$\int n^{p+1} = \pm \left\{ a - \frac{2^p - 1}{1} \cdot b + \frac{3^p - 2 \cdot 2^p + 1}{1 \cdot 2} c \right.$$

$$- \frac{4^p - 3 \cdot 3^p + 3 \cdot 2^p - 1}{1.\ 2.\ 3} \cdot d +$$

$$\left. \frac{5^p - 4 \cdot 4^p + 6 \cdot 3^p - 4 \cdot 2^p + 1}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \cdot e - \&c \right\}.$$

la loi de cette ſuite eſt viſible, elle doit être précédée du ſigne + ou du ſigne −, ſelon que l'expoſant p eſt pair ou impair; tous les termes poſtérieurs à celui dont le rang eſt marqué par $\overline{p+1}$ s'évanouiſſent.

On trouvera pareillement

$$\int \frac{n . \overline{n+1}}{1 . 2} = \frac{b}{2};$$

$$\int \left(\frac{n . \overline{n+1}}{1 . 2} \right)^2 = \frac{2b - 4c + d}{4};$$

$$\int \left(\frac{n . \overline{n+1}}{1 . 2} \right)^3 = \frac{4b - 32c + 38d - 12e + f}{8}; \ldots\ldots\ldots$$

Et généralement $\int \left(\frac{n . \overline{n+1}}{1 . 2} \right)^{p+1} =$

$$\frac{1}{1.2} \cdot \left\{ b - \frac{3^p - 1}{1} c + \frac{6^p - 2.3^p + 1}{1 . 2} . d - \frac{10^p - 3.6^p + 3.3^p - 1}{1.\ 2.\ 3} e \right.$$

$$\left. + \frac{15^p - 4.10^p + 6.6^p - 4.3^p + 1}{1 . 2 . 3 . 4} . f - \&c. \right\}$$

Suite dont la loi eſt viſible, & dans laquelle tous les termes poſtérieurs au $\overline{2p+1}$.^{e} s'évanouiſſent.

On trouvera de même

$$\int \frac{n . \overline{n+1} . \overline{n+2}}{1 . 2 . 3} = + \frac{c}{6}$$

$$\int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\right)^2 = -\frac{6c-18d+9e-f}{36} \ldots\ldots$$

Et généralement $\int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\right)^{p+1} =$

$$\pm\frac{1}{1.2.3}.\left\{c - \frac{4^p-1}{1}d + \frac{10^p-2.4^p+1}{1.2}.e - \frac{20^p-3.10^p+3.4^p-1}{1.2.3}f + \&c.\right\}$$

le signe + ou — selon que p est pair ou impair.

En continuant à procéder de même, & faisant pour abréger

$$m.\overline{m+1} = m^{\text{I}}$$
$$m.\overline{m+1}.\overline{m+2} = m^{\text{II}}$$
$$m.\overline{m+1}.\overline{m+2}.\overline{m+3} = m^{\text{III}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \&c.$$
$$n.\overline{n+1}.\overline{n+2}\ldots\ldots\overline{n+m} = n^{\text{I}}$$
$$n.\overline{n+1}.\overline{n+2}\ldots\ldots\overline{n+m+1} = n^{\text{II}}$$
$$n.\overline{n+1}.\overline{n+2}\ldots\ldots\overline{n+m+2} = n^{\text{III}}$$
$$n.\overline{n+1}.\overline{n+2}\ldots\ldots\overline{n+m+3} = n^{\text{IV}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \&c.$$

ainsi de suite :

On trouvera en général

$$\int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}\ldots\ldots\overline{n+m-2}}{1.2.3\ldots\ldots\overline{m-1}}\right)^{p+1} =$$

$$\pm\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots\overline{m-1}} \times$$

$$\left\{1.\frac{n^{\text{I}}}{m} \ldots\ldots\right.$$

$$-\left(\frac{m^p}{1}-1\right).\frac{n^{\text{II}}}{1.\overline{m+1}}$$

$$+\left(\frac{m^{\mathrm{I}\,p}}{1\,.\,2}-\frac{2\,m^{\mathrm{I}p}}{1}+1\right).\frac{n^{\mathrm{III}}}{1\,.\,2\,.\,\overline{m+2}}$$

$$-\left(\frac{m^{\mathrm{II}\,p}}{1\,.\,2\,.\,3}-\frac{3\,m^{\mathrm{I}\,p}}{1\,.\,2}+\frac{3\,m^{p}}{1}-1\right).\frac{n^{\mathrm{IV}}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\overline{m+3}}$$

$$+\left(\frac{m^{\mathrm{III}\,p}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}-\frac{4m^{\mathrm{II}p}}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{6m^{\mathrm{I}p}}{1\,.\,2}-\frac{4m^{p}}{1}+1\right).\frac{n^{\mathrm{V}}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,\overline{m+4}}$$

$- \;\&c.\; \}.$

Le Signe $-$ précédent dans le cas feulement où m eſt un nombre pair & p un nombre impair ; il faut obſerver que tous les termes de cette ſuite, qui ſuivent celui du rang $\overline{m\,p-p+1}$, s'évanouiſſent.

On a donc l'expreſſion générale en m, n, p de la ſomme des premiers nombres ordinaux de l'ordre m, pris au nombre n, & élevés chacun à la puiſſance du degré exprimé par $\overline{p+1}$; *C. Q. F. T.*

XXXVIII.

Avertissement. Pour éviter les formules trop compliquées, ſoit par le grand nombre des termes dont elles peuvent être compoſées, ſoit par le grand nombre des facteurs qui compoſent ces différents termes, ſoit même par le grand nombre des ſuites, lorſque ces formules ſont formées de pluſieurs ſuites différentes ; nous omettrons & remplacerons par quelques points les facteurs, termes & ſuites dont la loi ſera viſible, & qui ſeront faciles à ſuppléer.

Par Ex. $1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\ldots\ldots\,24$ exprimera le produit de tous les nombres naturels depuis 1 juſqu'à 24. incluſivement.

$$80\,.\,81\,\ldots\ldots\ldots\,\overline{80+m}$$

exprimera le produit de tous les nombres naturels depuis 80 juſques à $\overline{80+m}$ incluſivement.

$1+2+3+\ldots\ldots\ldots+25$

marquera la somme des 25 premiers nombres naturels :

$$1 + 3 + 6 + \ldots\ldots\ldots + \frac{n.\overline{n+1}}{1.2}$$

la somme des n premiers triangulaires :

$$\begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots + 1 \\ + 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n \\ + 1 + 3 + 6 + \ldots\ldots\ldots + \frac{n.\overline{n+1}}{1.2} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + 1 + m + \frac{m.\overline{m+1}}{1.2} + \ldots + \frac{n.\overline{n+1}\ldots\overline{n+m-2}}{1.2\ldots\ldots\overline{m-1}} \end{array}$$

la somme des n premiers nombres ordinaux des m premiers ordres ; ainsi des autres.

Sur quoi il faut observer que cette méthode a l'avantage de fixer d'une maniere générale & visible le nombre des facteurs, termes & suites qui composent une quantité algébrique ; quoique ce nombre dépende de la valeur des lettres qui entrent dans la quantité, & varie au gré de cette valeur.



CHAPITRE II.

De la Probabilité des Hazards qui ont lieu dans le concours simultané de plusieurs Chances.

§. XXXIX.

Il peut se faire que sur le nombre total m des Chances dépendantes d'un acte, mouvement, ou état de choses donné, il n'en doive arriver qu'une seule : il peut se faire aussi qu'il doive arriver un certain nombre p de ces chances.

Dans le premier cas, si on distingue une partie de ces m chances; que le nombre des chances distinguées soit n, & qu'un hazard spécifié consiste dans l'arrivée d'une quelconque des chances distinguées : la probabilité du hazard spécifié est $\frac{n}{m}$.

Par Ex. Si sur le nombre total des 32 cartes qui composent un jeu de Piquet, on en doit tirer une aveuglément & sans choix, & qu'on desire que la carte tirée soit un Tréfle : les cartes distinguées sont les Tréfles qui sont au nombre de 8 ; & la probabilité du hazard desiré est $\frac{8}{32}$ ou $\frac{1}{4}$.

Dans le 2e. cas : si l'on distingue une partie du nombre total des chances, que le nombre des chances distinguées soit n, & qu'un hazard spécifié consiste dans l'arrivée d'un nombre r des chances distinguées : *Par ex.* Si sur les 32 cartes d'un jeu de Piquet,

on en doit tirer 9 aveuglément, & qu'on desire que dans les 9 cartes tirées il se trouve 5 Tréfles, sans spécifier lesquels : alors la probabilité du hazard spécifié n'est plus $\frac{n}{m}$ ni $\frac{1}{4}$; l'objet de ce chapitre est de déterminer cette Probabilité.

X L.

Théoreme I. Nommant m le nombre de chances dépendantes d'un acte, mouvement, ou état de choses donné, je dis qu'un nombre p de ces chances peut arriver du nombre de manieres également possibles exprimé par $\frac{m.\overline{m-1}\ldots\ldots\overline{m-p+1}}{1.2\ldots\ldots p}$.

Démonst. Représentant par a, b, c, d, f, &c. au nombre m, les chances données :

Le nombre de manieres dont une seule de ces chances peut arriver, est m ou $\frac{m}{1}$ comme il est évid.

Le nombre des manieres dont deux des m chances données peuvent arriver, est celui des termes de la table suivante :

a b				
a c	*b c*			
a d	*b d*	*c d*		
a f	*b f*	*c f*	*d f*	
—	—	—	—	—

dans laquelle le nombre des lettres est m : or, il est visible que le nombre de ces termes est $\frac{m.\overline{m-1}}{1.2}$.

Le nombre des manieres dont trois des m chances données peuvent arriver, est celui des termes de la table suivante :

a b c			
a b d	*a c d*		
a b f	*a c f*	*a d f*	
	b c d		
	b c f	*b d f*	
		c d f	

dans laquelle le nombre des lettres est m : or, il est visible que le nombre de ces termes est $\frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Ainsi de suite : & continuant à procéder de même, on trouvera généralement que le nombe des manieres également possibles dont un nombre p des m chances données peut arriver à la fois, est $\frac{m \cdot \overline{m-1} \ldots \overline{m-p+1}}{1 \cdot 2 \ldots \ldots p}$ *C. Q. F. D.*

X L I.

Ex. Sur un jeu de Piquet de 32 cartes mêlées on en tire 15 aveuglément & sans choix, & l'on demande de combien de manieres également possibles la somme des cartes tirées peut se trouver composée. Pour le trouver : dans l'expression générale $\frac{m \ldots \ldots \overline{m-p+1}}{1 \cdot 2 \ldots \ldots p}$; je substitue 32 à m, 15 à p, & elle devient $\frac{32 \ldots 18}{1.2 \ldots 15} = 565722720$ qui est le nombre cherché.

X L I I.

Remarq. I. Si l'on demandoit de combien de manieres on peut partager les m chances en deux parts, dont l'une contiendroit un nombre p de ces chances, & l'autre les $\overline{m-p}$ chances restantes ; la solution seroit la même, comme il est évident : c'est-à-dire, que le nombre de manieres cherché, seroit $\frac{m \ldots \ldots \overline{m-p+1}}{1 \cdot 2 \ldots \ldots p}$ ou $\frac{m \ldots \ldots \overline{p+1}}{1 \cdot 2 \ldots \ldots \overline{m-p}}$:

Ainsi, si l'on demande de combien de manieres on peut des 32 cartes du Piquet faire deux parts, l'une de 27 cartes, l'autre de 5, on trouvera pour le nombre cherché $\frac{32 \ldots\ldots 28}{1.2.3.4.5}$ ou $\frac{32 \ldots\ldots 6}{1.2 \ldots 27} = 201376$

XLIII.

NOMMANT toujours m le nombre total des chances; si un nombre p de ces chances doit arriver à la fois; puis un nombre p^1 des $m-p$ chances qui restent, arriver ensuite à la fois; je dis que cet effet peut avoir lieu du nombre de manieres exprimé par

$$\frac{m \ldots\ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots\ldots p} \cdot \frac{\overline{m-p} \ldots\ldots \overline{m-p-p^1+1}}{1.2 \ldots\ldots p^1}.$$

Car le nombre des manieres dont les p chances qui doivent d'abord arriver, peuvent arriver, est $\frac{m \ldots\ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots\ldots p}$; mais à chacune de ces manieres, les p^1 chances qui doivent ensuite arriver peuvent arriver de $\frac{\overline{m-p} \ldots \overline{m-p-p^1+1}}{1.2 \ldots\ldots p^1}$ manieres; donc le nombre de manieres dont l'effet duquel il s'agit peut avoir lieu, est le produit de $\frac{m \ldots\ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots\ldots p}$ par $\frac{\overline{m-p} \ldots\ldots \overline{m-p-p^1+1}}{1.2 \ldots\ldots p^1}$

Par ex. Si l'on demande de combien de manieres sur un jeu de Piquet je puis prendre 12 cartes, & ensuite sur les 20 cartes restantes en prendre 8 : je substitue dans la formule ci-dessus 32 à m; 12 à p; 8 à p^1; & elle devient $\frac{32 \ldots\ldots 21}{1.2 \ldots\ldots 12} \cdot \frac{20 \ldots\ldots 13}{1.2 \ldots\ldots 8}$ $= 28443124004800$ qui est le nombre cherché.

XLIV.

En continuant à procéder de même, on trouvera que m étant le nombre total des chances, si un nombre p de ces chances doit d'abord arriver; puis un nombre p^{I} des $m-p$ chances qui restent; puis un nombre p^{II} d'entre les $m-p-p^{I}$ chances qui restent; puis un nombre p^{III} d'entre les $m-p-p^{I}-p^{II}$ chances qui restent, ainsi de suite; le nombre de manieres également possibles dont cet effet peut avoir lieu, est $\frac{m\ldots\ldots\overline{m-p+1}}{1.2\ldots\ldots p}\cdot\frac{\overline{m-p}\ldots\overline{m-p-p^{I}+1}}{1.2\ldots\ldots p^{I}}\times$ $\frac{\overline{m-p-p^{I}}\ldots\ldots\ldots\overline{m-p-p^{I}-p^{II}+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots p^{II}}\times\ldots\ldots\ldots$

XLV.

Remarq. 2e. Si l'on demandoit de combien de manieres on peut partager les m chances en plusieurs parts; la premiere contenant un nombre p, la 2.e un nombre p^{I}, la 3.e un nombre p^{II}, &c. de ces chances; on trouveroit la formule ci-dessus pour le nombre cherché.

Par ex. Si l'on demande de combien de manieres les 32 cartes du Piquet peuvent être distribuées entre les 2 joueurs & le talon; ou ce qui est de même, partagées en 3 parts deux de 12, & l'autre de 8 cartes: on aura pour le nombre cherché

$\frac{32\ldots21}{1.2\ldots12}\cdot\frac{20\ldots13}{1\ldots8}=28443124004800.$

Si l'on demande de combien de manieres les 52 cartes du jeu complet peuvent être partagées entre les 4 joueurs au Wisk, ou ce qui est de même, distribuées en 4 parts, chacune de 13 cartes:

Dans la formule ci-dessus je substitue 52 à m, 13 à p, p^{I} & p^{II}, & elle devient $\frac{52\ldots\ldots\ldots40}{1.2\ldots\ldots\ldots13}\times$

$\frac{39\ldots\ldots27}{1.2\ldots\ldots13}\cdot\frac{26\ldots\ldots14}{1.2\ldots\ldots13}\cdot=8565126197851151797861440000.$
qui est le nombre cherché.

X L V I.

Théoreme II. Nommant m le nombre des chances dont un hazard spécifié feroit partie s'il ne devoit arriver qu'une seule de ces chances : & supposant

1°. Qu'un nombre p de ces chances doit certainement arriver :

2°. Que dans le nombre total des chances, on en distingue une partie, & que le nombre des chances distinguées soit n :

3°. Que le hazard spécifié consiste dans l'arrivée d'un nombre r juste d'entre les chances distinguées :

Je dis que la Probabilité du hazard spécifié, est

$$\frac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots r}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p-n+r+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots\overline{p-r}}\cdot\frac{m\ldots\overline{m-p+1}}{1.2\ldots\ldots p}.$$

Démonst. 1.° Sur le nombre n des chances distinguées, il en peut arriver un nombre r du nombre de manieres exprimé par $\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}$; (*XL.*) : mais à chacune de ces manieres, sur le nombre $m-n$ des chances non distinguées, il en peut arriver un nombre $p-r$ de $\frac{\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{p-r}}$ manieres : donc le nombre des manieres également possibles d'avoir le hazard spécifié, ou ce qui est de même, le nombre des chances qui donnent ce hazard dans la présente hypothese, est

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{p-r}}$$

2.° Sur la totalité des m chances supposées, il

peut en arriver un nombre p du nombre de manieres exprimé par $\frac{m \ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots p}$; donc ce nombre est celui de tous les cas possibles, c'est-à-dire, le nombre total des chances dans la présente hypothese : Donc la Probabilité cherchée est (X.)

$$\frac{n \ldots \overline{n-r+1}}{1.2 \ldots r} \cdot \frac{\overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+r+1}}{1.2 \ldots \overline{p-r}} : \frac{m \ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots p}$$

C. Q. F. D.

XLVII.

Exemp. Si sur un jeu de Piquet on doit tirer aveuglément 9 cartes, & qu'on desire que dans les 9 cartes tirées il se trouve 5 piques juste, c. à. d. ni plus ni moins ; pour avoir la probabilité du hazard desiré, dans la formule générale ci-dessus, je fais $m = 32$; $n = 8$; $p = 9$; $5 = r$; & elle devient

$$\frac{8 \ldots 4}{1.2 \ldots 5} \cdot \frac{24 \ldots 21}{1.2 \ldots 4} : \frac{32 \ldots 24}{1.2 \ldots 9} = \frac{12397}{584350}.$$

XLVIII.

Si dans l'expression générale

$$\frac{n \ldots \overline{n-r+1}}{1.2 \ldots r} \cdot \frac{\overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+r+1}}{1.2 \ldots \overline{p-r}} : \frac{m \ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots p},$$

on fait $r = o$, elle devient

$$\frac{\overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+1}}{1.2 \ldots p} : \frac{m \ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots p}$$

qui est la probabilité qu'il n'arrivera aucune des n chances distinguées.

XLIX.

Si on retranche cette derniere expression de l'unité, on aura

1 -

$1 - \frac{\overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+1}}{1.2 \ldots p} : \frac{m \ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots p}$ pour la probabilité qu'il arrivera au moins une des chances diſtinguées ; (XIV.)

L.

Exemp. Si ſur les 90 Numéros de la Lotterie Royale de France j'en prends 75, la probabilité que dans le tirage prochain il n'arrivera aucun des 75 numéros que j'ai pris ſe trouvera en ſubſtituant dans la formule $\frac{\overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+1}}{1.2 \ldots p} : \frac{m \ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots p}$ 90 à m, 75 à n, & 5 à p ; & elle deviendra $\frac{15 \ldots 11}{1.2 \ldots 5} : \frac{90 \ldots 86}{1.2 \ldots 5} = \frac{1001}{14649756}$; qui eſt la probabilité cherchée ; Et $1 - \frac{1001}{14649756}$ ou $\frac{14648755}{14649756}$ ſera la probabilité que dans le tirage prochain il arrivera au moins un des 75 Numéros que j'ai pris.

L I.

Si dans l'expreſſion générale on fait $r = n$; elle devient $\frac{\overline{m-r} \ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots \overline{p-r}} : \frac{m \ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots p}$ qui eſt la probabilité que toutes les chances diſtinguées arriveront :

Par ex. Si je prends 3 numéros de la Lotterie Royale de France ; pour avoir la probabilité que ces 3 numéros arriveront au prochain tirage, dans la formule ci-deſſus je ſubſtitue 90 à m, 5 à p, 3 à r, & elle devient $\frac{87.86}{1.2} : \frac{90 \ldots 86}{1.2 \ldots 5} = \frac{1}{11748}$. qui eſt la probabilité cherchée.

LII.

SI $n=p$, la formule générale devient $\frac{p \ldots \overline{p-r+1}}{1.2 \ldots\ldots r}$.
$\frac{\overline{m-p} \ldots \overline{m-2p+r+1}}{1.2 \ldots\ldots\ldots \overline{p-r}} : \frac{m \ldots\ldots\ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots\ldots p}$.

LIII.

SI $r=p=n$; la formule générale devient $1 : \frac{m \ldots\ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots\ldots p}$ ou $\frac{1.2 \ldots\ldots p}{m \ldots\ldots \overline{m-p+1}}$;

Par ex. Si je prends 5 des 90 numéros de la Loterie Royale de France : pour avoir la probabilité que mes 5 numéros arriveront au tirage prochain; dans l'expression ci-dessus je fais $90=m$, $5=p$, & elle devient $\frac{1.2 \ldots\ldots\ldots 5}{90 \ldots\ldots\ldots 86} = \frac{1}{43949268}$.

LIV.

SI $p=r=1$. La formule générale se réduit à $\frac{n}{m}$; ce qui est le cas où une seule des chances distinguées doit arriver.

LV.

PROBLÊME I[er]. Nommant m le nombre des chances dont un hazard spécifié feroit partie s'il ne devoit arriver qu'une seule de ces chances : & supposant 1°. Qu'un nombre p de ces chances doit certainement arriver. 2°. Que dans le nombre total des chances on en distingue une partie, & que le nombre des chances distinguées est n. 3°. Que le hazard spécifié consiste dans l'arrivée d'un nombre r au moins d'entre les n chances distinguées :

Trouver la Probabilité du hazard ſpécifié.

Solut. 1°. Pour avoir le numérateur de la Probabilité cherchée ; j'obſerve qu'il eſt compoſé de tous les produits particuliers ci-après énoncés, ſavoir ; le nombre de toutes les manieres également poſſibles de l'arrivée du nombre juſte

$$\left\{\begin{array}{l} r \\ r+1 \\ r+2 \\ r+3 \\ \ldots\ldots \\ n-1 \\ n \end{array}\right.$$ d'entre les n chances diſtinguées ; *c. à. d.* de

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{n \ldots\ldots \overline{n-r+1}}{1.2 \ldots\ldots r} \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p-n+r+1}}{1.2 \ldots\ldots \overline{p-r}}, \\
\dfrac{n \ldots\ldots \overline{n-r}}{1.2 \ldots\ldots \overline{r+1}} \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p-n+r+2}}{1.2 \ldots\ldots \overline{p-r-1}}, \\
\dfrac{n \ldots\ldots \overline{n-r-1}}{1.2 \ldots\ldots \overline{r+2}} \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p-n+r+3}}{1.2 \ldots\ldots \overline{p-r-2}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad n \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p}}{1.2 \ldots\ldots \overline{p-n-1}}, \\
\qquad 1 \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots \overline{p-n}},
\end{array}\right.$$

ou ce qui eſt de même : le numérateur de la probabilité cherchée eſt la ſuite compoſée de la ſomme de tous ces produits.

2°. Le Dénominateur de la Probabilité cherchée eſt, comme ci-deſſus, (XLVI.) $\dfrac{m \ldots\ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots\ldots p}$;

donc la probabilité cherchée est

$$\left\{ \begin{array}{r} 1 \cdot \frac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p+1}}{1 \cdot 2 \ldots \overline{p-n}} + \\ n \cdot \frac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p}}{1 \cdot 2 \ldots \overline{p-n+1}} + \\ \frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p-1}}{1 \cdot 2 \ldots \overline{p-n+2}} + \\ \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p-2}}{1 \cdot 2 \ldots \overline{p-n+3}} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ \frac{n \ldots \overline{n-r}}{1 \cdot 2 \ldots \overline{r+1}} \cdot \frac{\overline{m-n} \ldots \overline{m-p-n+r+2}}{1 \cdot 2 \ldots\ldots \overline{p-r-1}} + \\ \frac{n \ldots \overline{n-r+1}}{1 \cdot 2 \ldots\ldots r} \cdot \frac{\overline{m-n} \ldots \overline{m-p-n+r+1}}{1 \cdot 2 \ldots\ldots \overline{p-r}} \end{array} \right\} : \frac{m \ldots \overline{m-p+1}}{1 \cdot 2 \ldots p}$$

C. Q. F. T.

L V I.

EXEMPLE. I. Je suppose qu'on tire aveuglément & sans choix 10 cartes sur un jeu de Piquet de 32 cartes : je desire que dans les 10 cartes tirées, il se trouve au moins 5 cœurs : pour avoir la probabilité du hazard desiré ; dans l'expression générale ci-dessus, je fais $m = 32$, $p = 10$, $n = 8$, $5 = r$, & elle devient

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot \frac{24 \cdot 23}{1 \cdot 2} + \\ \frac{8}{1} \cdot \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \\ \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \\ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{24 \ldots\ldots 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \end{array} \right\} : \frac{32 \ldots\ldots 23}{1 \cdot 2 \ldots\ldots 10} = \frac{5857}{140244}$$

qui est la probabilité cherchée.

L V I I.

Exemple II. Sur les 90 Numéros de la Loterie Royale de France, on en choisit 75 : je desire que dans le tirage prochain il arrive au moins 3 des numéros choisis : pour avoir la probabilité du hazard desiré ; dans l'expression générale ci-dessus je fais $m = 90$, $p = 5$, $n = 75$, $r = 3$, & elle devient

$$\left\{ \frac{75 \ldots\ldots 71}{1.2.3.4.5} \cdot 1 + \frac{75 \ldots\ldots 72}{1.2.3.4} \cdot 15 + \frac{75.74.73}{1.2.3} \cdot \frac{15.14}{1.2} \right\} : \frac{90 \ldots\ldots 86}{1.2.3.4.5} = \frac{14193755}{14049756}$$

qui est la probabilité cherchée.

L V I I I.

Problême II. Nommant toujours m le nombre total des chances dont un hazard spécifié feroit partie s'il n'en devoit arriver qu'une seule : & supposant 1°. Qu'un nombre p de ces chances doit arriver certainement : 2°. Que dans ce nombre total des chances on en distingue une partie ; & que le nombre des chances distinguées est n ; 3°. Que le hazard spécifié consiste dans l'arrivée d'un nombre r au plus d'entre les n chances distinguées :

Trouver la Probabilité du hazard spécifié.

Solut. 1°. Pour avoir le numérateur de la Probabilité cherchée, j'observe qu'il est composé de tous les produits particuliers ci-après énoncés, savoir :

Le nombre de toutes les manieres également possibles de l'arrivée du nombre juste

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ r-1 \\ r-2 \\ \ldots\ldots \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$$ d'entre les n chances distinguées ; *c. à. d.*

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{p-r}},\\
\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+2}}{1.2\ldots\ldots\overline{r-1}}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r}}{1.2\ldots\overline{p-r+1}},\\
\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+3}}{1.2\ldots\ldots\overline{r-2}}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r-1}}{1.2\ldots\ldots\overline{p-r+2}},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
n\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+2}}{1.2\ldots\ldots\overline{p-1}},\\
1\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}}{1.2\ldots\ldots p},
\end{array}\right.$$

ou ce qui est de même : le numérateur de la probabilité cherchée est la suite composée de la somme de tous ces produits.

2.° Le Dénominateur de la probabilité cherchée est comme ci-dessus $\frac{m\ldots\overline{m-p+1}}{1.2\ldots p}$ (XLVI.) : donc la Probabilité cherchée est

$$\left\{\begin{array}{l}
1\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+1}}{1.2\ldots p}+\\
n\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+2}}{1.2\ldots\overline{p-1}}+\\
\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+3}}{1.2\ldots\overline{p-2}}+\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\
\frac{n\ldots\overline{n-r+2}}{1.2\ldots\overline{r-1}}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r}}{1.2\ldots\overline{p-r+1}}+\\
\frac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots r}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+1}}{1.2\ldots\overline{p-r}}
\end{array}\right\}\cdot\frac{m\ldots\overline{m-p+1}}{1.2\ldots p}$$

C. Q. F. T.

LIX.

Exemple I. Je suppose qu'on tire av euglément

& sans choix 10 cartes sur un jeu de Piquet de 32 cartes : je desire que dans les 10 cartes tirées, il ne se trouve que 4 cœurs au plus :

Pour avoir la probabilité du hazard desiré ; dans l'expression génerale ci-dessus, je fais $m = 32$; $p = 10$, $n = 8$, $r = 4$, & elle devient

$$\left(1 \cdot \frac{24 \ldots\ldots 15}{1.2 \ldots\ldots 10} + \right.$$
$$8 \cdot \frac{24 \ldots\ldots 16}{1.2 \ldots\ldots 9} +$$
$$\frac{8.7}{1.2} \cdot \frac{24 \ldots\ldots 17}{1.2 \ldots\ldots 8} +$$
$$\frac{8.7.6}{1.2.3} \cdot \frac{24 \ldots\ldots 18}{1.2 \ldots\ldots 7} +$$
$$\left. \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{24 \ldots\ldots 19}{1.2 \ldots\ldots 6} \right) : \frac{32 \ldots\ldots 23}{1.2 \ldots\ldots 10} = \frac{134387}{140244}$$

qui est la Probabilité cherchée.

L X.

EXEMPLE II. Sur les 90 numéros de la Loterie Royale de France, on en choisit 75 ; je desire que dans le tirage prochain il n'arrive que 2 au plus des numéros choisis ; pour avoir la probabilité du hazard desiré, dans l'expression génerale ci-dessus, je fais $m = 90$, $p = 5$, $n = 75$, $r = 2$, & elle devient

$$\left(1 \cdot \frac{15 \ldots\ldots 11}{1.2.3.4.5} + \right.$$
$$75 \cdot \frac{15 \ldots\ldots 12}{1.2.3.4} +$$
$$\left. \frac{75.74}{1.2} \cdot \frac{15.14.13}{1.2.3} \right) : \frac{90 \ldots\ldots 86}{1.2.3.4.5} = \frac{456001}{146497556},$$ qui est la Probabilité cherchée.

CHAPITRE III.

De la Probabilité des Hazards qui dérivent du concours successif de plusieurs Chances dans un ordre déterminé.

§. LXI.

Nous supposerons encore dans ce chapitre, que, sur le nombre total *m* des chances dépendantes d'un acte, mouvement ou état de choses donné, il en doive arriver successivement & une à une un nombre *p*; que, dans ce nombre total des chances on en distingue une partie; & que le nombre des chances distinguées est *n*.

Mais il peut arriver deux cas différents :

Ou bien le hazard spécifié dépend de l'arrivée d'un nombre *r* d'entre les chances distinguées, quelque soit l'ordre dans lequel elles arrivent : nous avons, dans le chapitre précédent, déterminé d'une maniere générale la probabilité du hazard spécifié dans cette hypothese.

En second lieu : il peut se faire que le hazard spécifié consiste en l'arrivée d'un nombre *r* d'entre les chances distinguées dans un ordre déterminé.

Par ex. Si sur les 32 cartes du Piquet on en nomme 4 dans un ordre déterminé, tel que celui-ci

As de Pique 3e, Roi de Tréfle 5e, Dame de Cœur 7e, Valet de Carreau 10e.

Si ensuite on tire aveuglément 10 des 32 cartes données ; successivement une à une ; & qu'on desire que dans les 10 cartes tirées, il s'en trouve au moins 2 de celles qu'on a nommées, dans la place qu'on leur a assignée : c'est-à-dire,

L'As de Pique la 3ᵉ, & le Roi de Tréfle la 5ᵉ; ou bien

L'As de Pique la 3ᵉ, & la Dame de Cœur la 7ᵉ; ou bien

L'As de Pique la 3ᵉ, & le Valet de Carreau la 10ᵉ; ou bien

Le Roi de Tréfle la 5ᵉ, & la Dame de Cœur la 7ᵉ; ou bien

Le Roi de Tréfle la 5ᵉ, & le Valet de Carreau la 10ᵉ; ou bien

La Dame de Cœur la 7ᵉ, & le Valet de Carreau la 10ᵉ.

Il s'agit de trouver dans ces sortes d'hypotheses la probabilité du hazard desiré, ce qui sera la matiere de ce troisieme Chapitre.

LXII.

Théorême. Nommant m le nombre des chances dépendantes d'un acte, mouvement, ou état de choses donné ; je dis qu'un nombre p de ces chances peut arriver successivement une à une du nombre de manieres également possibles exprimé par $m \cdot \overline{m-1} \cdot \ldots \ldots \overline{m-p+1}$

Dém. Représentant les chances données par a, b, c, d, f, &c. au nombre m ; il est évident que les manieres également possibles dont une seule de ces chances peut arriver, sont représentées toutes par les termes de table suivante

$a \quad b \quad c \quad d \quad f \quad —$

dont le nombre est m.

Le nombre des manieres dont deux des chances données peuvent arriver, est celui des termes de la table suivante,

a b	*b a*	*c a*	*d a*	*f a*	—
a c	*b c*	*c b*	*d b*	*f b*	—
a d	*b d*	*c d*	*d c*	*f c*	—
a f	*b f*	*c f*	*d f*	*f d*	—
—	—	—	—	—	—

dans laquelle le nombre des lettres est *m*, & où il est visible que le nombre des termes est $m \cdot \overline{m-1}$.

Le nombre des manieres également possibles, dont trois des *m* chances données peuvent arriver, est celui des termes de la Table suivante,

a b c	*b a c*	*c a b*	*d a b*	*f a b*	—
a b d	*b a d*	*c a d*	*d a c*	*f a c*	—
a b f	*b a f*	*c a f*	*d a f*	*f a d*	—
—	—	—	—	—	—
a c b	*b c a*	*c b a*	*d b a*	*f b a*	—
a c d	*b c d*	*c b d*	*d b c*	*f b c*	—
a c f	*b c f*	*c b f*	*d b f*	*f b d*	—
—	—	—	—	—	—
a d b	*b d a*	*c d a*	*d c a*	*f c a*	—
a d c	*b d c*	*c d b*	*d c b*	*f c b*	—
a d f	*b d f*	*c d f*	*d c f*	*f c d*	—
—	—	—	—	—	—
a f b	*b f a*	*c f a*	*d f a*	*f d a*	—
a f c	*b f c*	*c f b*	*d f b*	*f d b*	—
a f d	*b f d*	*c f d*	*d f c*	*f d c*	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—

dans laquelle le nombre des lettres est *m*, & où il

eſt viſible que le nombre des termes eſt

$$m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}$$

Ainſi de ſuite : & continuant à procéder de même, on trouvera généralement que le nombre des manieres également poſſibles, dont un nombre p des m chances données peut arriver ſucceſſivement une à une, eſt $m \cdot \overline{m-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{m-p+1}$; *C. Q. F. D.*

LXIII.

Exemple. Sur les 90 numéros de la Lotterie Royale de France, on doit au tirage prochain en tirer 5 ſucceſſivement une à une : pour ſavoir de combien de manieres la choſe peut ſe faire, ou ce qui eſt de même, combien il y a de quines déterminés également poſſibles ; dans l'expreſſion $m \ldots\ldots \overline{m-p+1}$ je ſubſtitue 90 à m, 5 à p; & elle devient 90 ..... 86 = 5273912160. qui eſt le nombre cherché.

LXIV.

Cor. Si $p = m$, l'expreſſion générale $m \ldots \overline{m-p+1}$ deviendra $1 . 2 . 3 \ldots\ldots m$, qui eſt le produit de tous les nombres naturels depuis 1 juſqu'à m incluſivement, c'eſt-à-dire que les m chances peuvent venir ſucceſſivement une à une de $1 . 2 \ldots\ldots m$, manieres ; ainſi les 24 lettres de l'alphabet peuvent être toutes nommées ſucceſſivement chacune une fois, ou être alignées l'une à la ſuite de l'autre du nombre de manieres $1 . 2 \ldots\ldots 24 = 569357459561529999360000$.

LXV.

Problême I. Sur le nombre total m des chances dépendantes d'un acte, mouvement, ou état de choſes donné, j'en diſtingue une partie, & repréſente par n le nombre des chances diſtinguées : Je nomme ſucceſſivement une à une les chances diſ-

tinguées dans un ordre déterminé : par exemple, la chance a la premiere, b la 2e, c la 3e, &c ; il doit arriver ſucceſſivement une à une un nombre p d'entre les m chances données : on demande de combien de manieres également poſſibles il peut arriver

$$\left\{\begin{array}{l}\text{o}\\ \text{une}\\ \text{deux}\\ \ldots\ldots\ldots\\ \text{le nombre } r\end{array}\right\}\text{ juſte : d'entre les chances}$$

nommées, ſans qu'aucune de ces chances arrive à la place où elle a été nommée.

SOLUT. 1°. Aucune des chances nommées n'arrivant, les $m-n$ chances qui n'ont pas été nommées peuvent occuper les p places ſuppoſées du nombre de manieres exprimé par $\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}$; (LXII.) donc le nombre de manieres également poſſibles dont il peut n'arriver aucune des chances nommées eſt $\dfrac{\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}}{\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}}$ ou 1. (i).

2°. La chance a peut occuper une des p places ſuppoſées d'un nombre p de manieres également poſſibles repréſentées par les termes de la table ſuivante

a	*	*	*	*
*	a	*	*	*
*	*	a	*	*
*	*	*	a	*
*	*	*	*	a

dans laquelle on ſuppoſe que p le nombre des places eſt 5, où on repréſente par * les places occupées par des chances qui n'ont point été nommées, & dans laquelle il eſt viſible que ſi on eut fait le nombre des places tout autre que 5, celui des termes auroit toujours été p.

Mais pour avoir le nombre de manieres dont a

peut arriver ailleurs qu'à sa place, il faut, du nombre des termes de la table ci-dessus, retrancher celui où a se trouve à sa place : donc la chance a peut arriver ailleurs qu'à sa place, du nombre de manieres exprimé par $p-1$.

Ce qui vient d'être dit de la chance a peut s'appliquer à chacune des autres chances nommées b, c, d, &c. qui sont au nombre de n; d'où l'on voit que le nombre de manieres dont une seule des chances nommées peut arriver sans que ce soit à sa place, est $n.\overline{p-1}$.

Mais à chacune de ces manieres, un nombre $p-1$ d'entre les $m-n$ chances qui n'ont pas été nommées, peuvent arriver dans les $p-1$ places restantes du nombre de manieres exprimé par

$\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+2}$: (LXII.)

Donc dans l'hypothese présente, le nombre de manieres également possibles dont une seule des chances nommées peut arriver ailleurs qu'à sa place, est $n.\overline{p-1}.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+2}$ ou

$$\frac{n}{1}.\left(\frac{1.p}{-1}\right).\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+2}\,.$$

3°. La chance a & la chance b peuvent occuper deux d'entre les p places données, de $p.\overline{p-1}$ manieres représentées par les termes de la table suivante

a	b	*	*	*	b	a	*	*	*
a	*	b	*	*	b	*	a	*	*
a	*	*	b	*	b	*	*	a	*
a	*	*	*	b	b	*	*	*	a
*	a	b	*	*	*	b	a	*	*
*	a	*	b	*	*	b	*	a	*
*	a	*	*	b	*	b	*	*	a
*	*	a	b	*	*	*	b	a	*
*	*	a	*	b	*	*	b	*	a
*	*	*	a	b	*	*	*	b	a

desquels il faut retrancher ceux où a occupe la 1e.

place, & ceux où *b* occupe la 2e. place, lesquels sont au nombre de $2\overline{p-1}$; moins celui où *a* étant à la 1e. place, *b* est à la 2e.

Ainsi les deux chances *a* & *b* peuvent arriver sans que ce soit à leurs places du nombre de manieres $p.\overline{p-1}-2.\overline{p-1}+1$.

Ce qui vient d'être dit des chances *a* & *b* peut s'appliquer également aux chances

$$\left\{\begin{array}{llll} a \;\&\; b, & & & \\ a \;\&\; c, & b \;\&\; c & & \\ a \;\&\; d, & b \;\&\; d & c \;\&\; d & \\ \text{———} & \text{———} & \text{———} & \text{———} \end{array}\right.$$

au nombre $\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}$; d'où l'on voit que 2 des chances nommées peuvent arriver seules sans que ce soit à leurs places de $\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\left\{\begin{array}{l} 1.p.\overline{p-1} \\ -2.\overline{p-1} \\ +1 \end{array}\right\}$ manieres.

Mais à chacune de ces manieres : $\overline{p-2}$ d'entre les chances qui n'ont pas été nommées, peuvent occuper les $\overline{p-2}$ places restantes de $\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+3}$ manieres :

Donc le nombre des manieres également possibles, dont deux seulement d'entre les chances nommées peuvent arriver ailleurs qu'à leurs places, est

$$\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.\left\{\begin{array}{l} 1.p.\overline{p-1} \\ -2.\overline{p-1} \\ +1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+3}.$$

4°. En continuant de procéder de même, on trouvera successivement que le nombre des manieres également possibles dont 3, 4, &c. seulement des chances nommées peuvent arriver, sans qu'aucune arrive à sa place, est

$$\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}.\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{p-2}.\overline{p-1}.p \\ -3.\overline{p-2}.\overline{p-1} \\ +3.\overline{p-2} \\ -1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+4};$$

$$\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4}.\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{p-3}.\overline{p-2}.\overline{p-1}.p \\ -4.\overline{p-3}.\overline{p-2}.\overline{p-1} \\ +6.\overline{p-3}.\overline{p-2} \\ -4.\overline{p-3} \\ +1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}\ldots\overline{m-p-n+5};$$

&c.

D'où l'on voit qu'en général, dans la présente hypothese, le nombre des manieres également possibles dont il peut arriver un nombre r juste des n chances nommées sans qu'une seule arrive à la place où elle a été nommée, est

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}.\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{p-r+1}\ldots.p \\ -r.\overline{p-r+1}\ldots\overline{p-1} \\ +\frac{r.\overline{r-1}}{1.2}.\overline{p-r+1}\ldots\overline{p-2} \\ \mp\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+1}$$

C. Q. F. T.

L X V I.

Exemp. Sur 10 cartes différentes posées sur une table, j'en distingue 6 que je nomme par ordre une à une : sur les dix cartes données, on en tire 8 aveuglément & sans choix, mais une à une & successivement : il s'agit de savoir, de combien de manieres également possibles, dans les 8 cartes tirées il peut s'en trouver 4 ni plus ni moins de celles que j'ai nommées, sans qu'une seule se trouve à la place où elle a été nommée.

Pour y parvenir : dans la formule générale qui vient d'être trouvée, je substitue 10 à m, 6 à n, 8 à p, 4 à r, & elle devient

$$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.\left\{\begin{array}{l} 1.5.6.7.8 \\ -4.5.6.7 \\ +6.5.6 \\ -4.5 \\ +1 \end{array}\right\}.4.3.2.1=360360$$

qui est le nombre cherché.

LXVII.

Coroll. Si sur les m chances dépendantes d'un état de choses donné, on en nomme n une à une, assignant à chacune une certaine place, & s'il doit arriver successivement une à une un nombre p de ces chances données, la probabilité qu'il arrivera un nombre r juste d'entre les n chances nommées sans qu'une seule arrive à la place qui lui a été assignée, est

$$\frac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{p-r+1}\ldots\ldots p \\ -r.\overline{p-r+1}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ +\frac{r.\overline{r-1}}{1.2}.\overline{p-r+1}\ldots\overline{p-2} \\ \mp\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1\end{array}\right\}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+1}}{m\ldots\ldots\ldots\overline{m-p+1}};$$

car le numérateur de cette probabilité est évidemment la formule générale trouvée au problême 1er. ci-dessus, & le dénominateur est $m\ldots\overline{m-p+1}$ (LXII.)

LXVIII.

Exemple. Si sur 10 cartes données on en nomme 6 une à une, assignant à chacune une place déterminée, & qu'on tire sans choix une à une 8 de ces cartes : la probabilité que dans les 8 cartes tirées, il s'en trouvera 4 juste des nommées, sans qu'une seule soit tirée à la place qui lui a été assignée, est $\frac{360360}{1814400}=\frac{1001}{5010}$.

LXIX.

Si $n=p$; La formule générale devient

$$\frac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots r}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{n-r+1}\ldots n \\ -r.\overline{n-r+1}\ldots\overline{n-1} \\ +\frac{r.\overline{r-1}}{1.2}.\overline{n-r+1}\ldots\overline{n-2} \\ \mp\ldots\ldots\ldots \\ +1\end{array}\right\}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-2n+r+1}}{m\ldots\ldots\overline{m-n+1}};$$

ainsi :

ainſi, ſur 10 cartes différentes données, ſi on en nomme 8 une à une, aſſignant à chacune une place déterminée, & qu'on tire ſans choix une à une 8 des cartes données : la probabilité que dans les 8 cartes tirées il s'en trouvera 6 juſte des nommées ſans qu'une ſeule arrive à la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$\frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6}.\left\{\begin{array}{l} \quad 1.3.4.5.6.7.8 \\ -\ 6.3.4.5.6.7. \\ +15.3.4.5.6 \\ -20.3.4.5 \\ +15.3.4 \\ -\ 6.3 \\ +\ 1 \end{array}\right\}.\frac{2.1}{3.4.5.6.7.8.9.10}$$

$$= \frac{9403}{32400}.$$

L X X.

Si $n = r$, la formule générale devient

$$\left\{\begin{array}{l} \quad 1.\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p} \\ \quad -n.\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ +\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \pm 1 \end{array}\right\} : m\ldots\ldots\overline{m-n+1};$$

ainſi, ſur 10 cartes différentes données ſi on en nomme 6 une à une, aſſignant à chacune une place déterminée, & qu'on tire ſans choix une à une 8 des cartes données : la probabilité que dans les 8 cartes tirées toutes les nommées ſe trouveront, ſans qu'une ſeule arrive à la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$\left\{\begin{array}{l} \quad 1.3.4.5.6.7.8 \\ -\ 6.3.4.5.6.7 \\ +15.3.4.5.6 \\ -20.3.4.5 \\ +15.3.4 \\ -\ 6.3 \\ +\ 1 \end{array}\right\} : 10.9.8.7.6.5 = \frac{9403}{151400}.$$

LXXI.

Si $p = n = r$: La formule générale devient

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \,.\, 1.2\ldots\ldots p \\ -p \,.\, 1.2\ldots\ldots \overline{p-1} \\ +\frac{p.\overline{p-1}}{1.2} . 1.2\ldots\ldots p-2 \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\} : m\ldots\ldots \overline{m-p+1} =$$

$$\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots\ldots \pm \frac{1}{1.2\ldots p}\right) . \frac{1.2\ldots\ldots p}{m\ldots \overline{m-p+1}};$$

ainsi, sur 10 cartes différentes données si on en nomme 8 une à une, en assignant à chacune une place déterminée; & qu'on tire sans choix une à une 8 des cartes données : la probabilité que les 8 cartes tirées seront les 8 nommées sans qu'une seule arrive à la place qui lui a été assignée dans le tirage, est

$$\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots\ldots + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}\right) : 45$$
$$= \frac{2119}{259200}.$$

LXXII.

Si $m = p$ & $r = n$: La formule générale devient

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \,.\, \overline{m-n+1} \ldots\ldots\ldots m \\ -n \,.\, \overline{m-n+1} \ldots\ldots\ldots \overline{m-1} \\ +\frac{n.\overline{n-1}}{1.2} . \overline{m-n+1} \ldots\ldots\ldots \overline{m-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\} : m\ldots\ldots \overline{m-n+1};$$

ainsi, sur 10 cartes différentes données si on en nomme 3 une à une, assignant à chacune une place déterminée, & si l'on tire sans choix une à une les dix cartes données ; la probabilité qu'aucune des cartes nommées ne se trouvera à la place du tirage qui lui a été assignée, est

$$\left\{\begin{array}{l} 1.8.9.10 \\ -3.8.9 \\ +3.8 \\ -1 \end{array}\right\} : 10.9.8 = \frac{527}{720}$$

LXXIII.

Si $m = p = n = r$, la formule générale se réduit à $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3 \ldots m}$; ainsi, si l'on nomme successivement une à une 13 cartes données, & qu'à chaque carte qu'on nomme on tire aveuglément & sans choix une des 13 cartes données : la probabilité qu'aucune des cartes tirées ne sera celle qu'on nomme en même temps, est $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots - \frac{1}{1.2.3 \ldots 11.12.13} = \frac{63633137}{172972800}$.

LXXIV.

Si $r = o$; la formule générale devient $\frac{m-n \ldots\ldots m-n-p+1}{m \ldots\ldots m-p+1}$; ainsi, si sur 13 cartes données on en nomme 4 dans un ordre déterminé, & qu'on en tire 6 une à une & sans choix : la probabilité que dans les 6 cartes tirées il n'y en aura aucune de celles qu'on a nommées, est $\frac{9 \ldots\ldots 4}{13 \ldots\ldots 8} = \frac{7}{143}$.

LXXV.

Problème II. Sur le nombre m total des chances dépendantes d'un état de choses donné, j'en distingue une partie, & représente par n le nombre des chances distinguées : je nomme successivement une à une les chances distinguées dans un ordre déterminé : il doit arriver successivement une à une un nombre p d'entre les m chances don-

nées : on demande de combien de manieres également possibles il peut se faire qu'aucune des n chances distinguées n'arrive dans la place que je lui ai assignée en la nommant.

Solut. Il est évident que le nombre cherché est composé du nombre des manieres dont 0, 1, 2, 3, 4, ... n des chances distinguées peuvent arriver sans qu'une seule arrive à la place qui lui a été assignée en la nommant; c'est-à-dire, que le nombre cherché est la suite suivante : (LXV.).

$$1 \cdot \left\{ 1 \right\} \cdot \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+1}$$

$$+\frac{n}{1} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \cdot p \\ -1 \end{matrix} \right\} \cdot \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+2}$$

$$+\frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \cdot \overline{p-1} \cdot p \\ -2 \cdot \overline{p-1} \\ +1 \end{matrix} \right\} \cdot \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+3}$$

$$+\frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \cdot \overline{p-2} \cdot \overline{p-1} \cdot p \\ -3 \cdot \overline{p-2} \cdot \overline{p-1} \\ +3 \cdot \overline{p-2} \\ -1 \end{matrix} \right\} \cdot \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+4}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+1 \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \cdot \overline{p-n+1} \ldots\ldots p \\ -n \cdot \overline{p-n+1} \ldots \overline{p-1} \\ +\frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2} \cdot \overline{p-n+1} \ldots \overline{p-2} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1 \end{matrix} \right\} \cdot \overline{m-n} \ldots \overline{m-p+1};$$

C. Q. F. T.

LXXVI.

Exemp. Sur 10 cartes différentes données j'en distingue 6 que je nomme une à une, assignant à chacune une place déterminée :

Sur les dix cartes données, on en tire 8 aveuglément & sans choix; mais une à une & successivement : il s'agit de savoir de combien de manieres

également possibles aucune des 6 cartes nommées peut ne se trouver à la place qui lui a été assignée dans le tirage.

Pour y parvenir, dans la formule générale qui vient d'être trouvée, je substitue 10 à m, 6 à n, 8 à p; & elle devient

$$\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ - 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \\ + 6 \cdot 5 \cdot 6 \\ - 4 \cdot 5 \\ + 1 \end{array} \right\} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$+ 6 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ - 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \\ + 10 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ - 10 \cdot 4 \cdot 5 \\ + 5 \cdot 4 \\ - 1 \end{array} \right\} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$+ 1 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ - 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \\ + 15 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ - 20 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ + 15 \cdot 3 \cdot 4 \\ - 6 \cdot 3 \\ + 1 \end{array} \right\} \cdot 4 \cdot 3$$

$= 982812$; qui est le nombre cherché.

LXXVII.

Coroll. I. Si sur les m chances dépendantes d'un état de choses donné, on en nomme n une à une, assignant à chacune une place déterminée; & s'il doit arriver successivement une à une un nombre p d'entre les m chances données; la probabilité qu'aucune des n chances nommées n'arrivera dans la place qui lui a été assignée, est

$$\Big(1 \cdot \left\{ 1 \right\} \cdot \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+1}$$

$$+ n \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot p \\ -1 \end{array} \right\} \cdot \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+2}$$

$$+\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.\left\{\begin{array}{l}1.\overline{p-1}.p\\ -2.\overline{p-1}\\ +1\end{array}\right\}.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+3}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+1.\left\{\begin{array}{l}1.\overline{p-n+1}\ldots\ldots p\\ -n.\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-1}\\ +\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-2}\\ \mp+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm 1\end{array}\right\}.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p+1}\Bigg):$$

$$m\ldots\ldots\ldots\overline{m-p+1},$$

car le numérateur de cette probabilité est évidemment la formule générale trouvée au Problême II. ci-dessus; & le dénominateur est $m\ldots\ldots\overline{m-p+1}$ (LXII.)

LXXVIII.

Exemple. Si sur 10 cartes différentes données, on en nomme 6 successivement une à une: & que sur les 10 cartes donnnées on en tire 8 aveuglément & sans choix, mais une à une successivement: la probabilité qu'aucune des 6 cartes nommées ne se trouvera à la place qui lui aura été assignée dans le tirage est $\frac{982812}{1814400}=\frac{1901}{151200}$.

LXXIX.

Si $n=p$, la formule générale devient

$$[1.(1).\quad\overline{m-p}\ldots\ldots\overline{m-2p+1}$$

$$+p.\left(\begin{array}{l}1.p\\ -1\end{array}\right).\overline{m-p}\ldots\ldots\overline{m-2p+2}$$

$$+\frac{p.\overline{p-1}}{1.2}.\left(\begin{array}{l}1.\overline{p-1}.p\\ -2.\overline{p-1}\\ +1\end{array}\right).\overline{m-p}\ldots\ldots\overline{m-2p+3}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+1\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots\pm\frac{1}{1.2\ldots p}\right).1.2\ldots p\,]:$$

$$m\ldots\ldots\overline{m-p+1},$$

ainsi, si sur 10 cartes différentes données on en nomme 8 une à une, assignant à chacune une place déterminée, & qu'on tire sans choix une à une 8 des cartes données : la probabilité que dans les 8 cartes tirées il ne se trouvera pas une seule des cartes nommées dans la place qui lui a été assignée, est

$$\left[\frac{8\,.\,7}{1\,.\,2}\,.\left\{\begin{array}{l} \;1\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8 \\ -\;6\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7 \\ +\,15\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6 \\ -\,20\,.\,3\,.\,4\,.\,5 \\ +\,15\,.\,3\,.\,4 \\ -\;6\,.\,3 \\ +\;1 \end{array}\right\}.\,2\,.\,1\right.$$

$$+\,8\,.\left\{\begin{array}{l} \;1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8 \\ -\;7\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7 \\ +\,21\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6 \\ -\,35\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5 \\ +\,35\,.\,2\,.\,3\,.\,4 \\ -\,21\,.\,2\,.\,3 \\ +\;7\,.\,2 \\ -\;1 \end{array}\right\}.\,2$$

$$\left.+\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots\ldots+\frac{1}{1.2\ldots8}\right).\,1.2\ldots8\,\right]:$$

$$10\,.\,9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\;=\;\frac{818393}{1814400}\,.$$

L X X X.

Si $m = p$, la formule générale se réduit à

$$\left\{\begin{array}{l} \;1\,.\,\overline{p-n+1}\ldots\ldots p \\ -\,n\,.\,\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ +\,\frac{n\,.\,\overline{n-1}}{1\,.\,2}\,.\,\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ -\!\!+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm\,1 \end{array}\right\}:m\ldots\ldots\overline{m-n+1}\,;$$

ainsi, si sur 10 cartes différentes données on en nomme 6 une à une, assignant à chacune une place

déterminée, & qu'on tire ſans choix une à une les 10 cartes données : la probabilité qu'il n'arrivera dans le tirage aucune des 6 cartes nommées à la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 9 \,.\, 10 \\ -\, 6 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 9 \\ +\, 15 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \\ -\, 20 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \\ +\, 15 \,.\, 5 \,.\, 6 \\ -\, 6 \,.\, 5 \\ +\, 1 \end{array}\right\} : 10.9.8.7.6.5 = \frac{81901}{151200}.$$

LXXXI.

Si $m = p = n$; la formule générale ſe reduit à

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots\ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots m}.$$

qui eſt la même trouvée ci-deſſus (LXXIII.)

LXXXII.

Coroll. II. Si ſur les m chances dépendantes d'un état de choſes données, on en nomme n une à une, aſſignant à chacune une place déterminée : & s'il doit arriver ſucceſſivement une à une un nombre p d'entre les m chances données : la probabilité qu'une au moins d'entre les n chances nommées arrivera dans la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$1 - [\, 1 \,.\, (1) \,.\, \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+1}$$

$$+ n \,.\, \left(\begin{array}{l} 1 \,.\, p \\ -1 \end{array}\right) \,.\, \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+2}$$

$$+ \frac{n \,.\, \overline{n-1}}{1.2} \,.\, \left(\begin{array}{l} 1 \,.\, \overline{p-1} \,.\, p \\ -2 \,.\, p-1 \\ +1 \end{array}\right) \,.\, \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+3}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{array}{l} \quad 1 . \overline{p-n+1} \ldots\ldots p \\ -n . \overline{p-n+1} \ldots\ldots p-1 \\ +1 . \quad + \frac{n . \overline{n-1}}{1 . 2} . \overline{p-n+1} \ldots\ldots \overline{p-2} \quad . \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p+1} \;] : \\ -+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1 \end{array}$$

$$m \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{m-p+1} \, . \quad (\text{XV. LXXVII.})$$

Et si $n = p$; cette probabilité est

$$1 - [\, 1 \, . \, (1) \qquad . \overline{m-p} \ldots\ldots \overline{m-2p+1}$$

$$+ p \, . \left(\begin{array}{l} 1 . p \\ -1 \end{array} \right) \qquad . \overline{m-p} \ldots\ldots \overline{m-2p+2}$$

$$+ \frac{p . \overline{p-1}}{1 . 2} . \left(\begin{array}{l} 1 . \overline{p-1} . p \\ -2 . \overline{p-1} \\ +1 \end{array} \right) . \overline{m-p} \ldots\ldots \overline{m-2p+3}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+1 \left(\frac{1}{1 . 2} - \frac{1}{1 . 2 . 3} + \frac{1}{1 . 2 . 3 . 4} - \ldots\ldots \pm \frac{1}{1 . 2 \ldots\ldots p} \right) .$$

$$1 . 2 . 3 \ldots\ldots p \,] : \overline{m \ldots\ldots m - p + 1} .$$

(XV. LXXIX.)

Et si $m = p$; cette probabilité est

$$1 - . \left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \quad . \overline{p-n+1} \ldots p \\ \quad -n \quad . \overline{p-n+1} \ldots p-1 \\ + \frac{n . \overline{n-1}}{1 . 2} . \overline{p-n+1} \ldots \overline{p-2} \\ -+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1 \end{array} \right\} : m \ldots\ldots \overline{m-n+1}$$

(XV. LXXX.)

Et si $m = n = p$; cette probabilité est

$$1 - \frac{1}{1 . 2} + \frac{1}{1 . 2 . 3} - \frac{1}{1 . 2 . 3 . 4} + \ldots\ldots \pm \frac{1}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots m} .$$

Ainsi, si l'on nomme successivement une à une 13 cartes données; & si à chaque carte qu'on nomme, on tire aveuglément & sans choix une des 13 cartes données: la probabilité qu'il se trouvera au moins

une des cartes tirées qui sera celle qu'on nomme en même temps, est

$$1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13} = \frac{109339663}{172972800}.$$

LXXXIII.

PROBLÊME III. Sur le nombre total m des chances dépendantes d'un état de choses donné, on en nomme une partie au nombre n, assignant à chacune une place déterminée : il en doit arriver une partie au nombre p, une à une & successivement : on demande quelle est la probabilité que dans les p chances qui arriveront il s'en trouve un nombre r juste de celles qu'on a nommées ; chacune dans la place qui lui a été assignée, & un nombre t juste de celles qu'on a nommées ailleurs que dans les places qui leur ont été assignées.

SOLUT. Pour avoir le numérateur de la probabilité cherchée : j'observe que le nombre de manieres dont sur les n chances nommées on peut en prendre r pour les mettre chacune dans la place qui lui a été assignée, est $\frac{n \ldots\ldots \overline{n-r+1}}{1.2 \ldots\ldots r}$ (XL.)

Mais chacune de ces manieres étant déterminée ; il reste $m-r$ d'entre les chances données, & $p-r$ chances qui doivent encore arriver, & sur ces $n-r$ chances nommées, il faut en prendre t pour les mettre chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée.

Or, le nombre des chances données étant $\overline{m-r}$, celui des chances nommées $\overline{n-r}$, celui des chances arrivantes $\overline{p-r}$; pour avoir le nombre de manieres dont parmi les $\overline{p-r}$ chances arrivantes il peut s'en trouver un nombre t juste d'entre les $\overline{n-r}$ nom-

mées, sans qu'une seule se trouve à la place qui lui a été assignée : il faut, dans la formule générale trouvée au Problême 1er. (LXV.) substituer $\overline{m-r}$ à m; $\overline{n-r}$ à n; $\overline{p-r}$ à p; t à r: au moyen de quoi elle devient

$$\frac{\overline{n-r}\ldots\ldots\overline{n-r-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l} \quad 1\ \cdot\overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r}\\ -\ t\ \cdot\overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r-1}\\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2}\cdot\overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r-2}\\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +1\end{array}\right\}\cdot$$

$$\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-n\,p+r+t+1};$$

Donc cette quantité étant multipliée par $\frac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots r}$ donnera un produit qui sera le numérateur de la probabilité cherchée : dailleurs le dénominateur de cette même probabilité est toujours $m\ldots\overline{m-p+1}$: Donc la probabilité cherchée est

$$\frac{n.\overline{n-1}\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\frac{\overline{n-r}\ldots\ldots\overline{n-r-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot$$

$$\left\{\begin{array}{l} \quad 1\ \cdot\overline{p-r-t+1}\ldots\overline{p-r}\\ -\ t\ \cdot\overline{p-r-t+1}\ldots\overline{p-r-1}\\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2}\cdot\overline{p-r-t+1}\ldots\overline{p-r-2}\\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +1\end{array}\right\}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+t+1}}{m\ldots\ldots\overline{m-p+1}};$$

C. Q. F. T.

LXXXIV.

Exemple. Si sur 10 cartes différentes données, on en nomme 6 successivement une à une, assignant à chacune une place déterminée; si ensuite on tire aveuglément & sans choix 8 d'entre les 10 cartes données, & qu'on desire que dans les 8 cartes tirées il s'en trouve juste 3 des nommées chacune à la place qui lui a été assignée, & 2 juste des nom-

mées chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée : pour avoir la probabilité du hazard desiré ; dans la formule générale ci-dessus trouvée, je fais $m = 10$, $p = 8$, $n = 6$, $r = 3$, $t = 2$, & elle devient $\frac{6.5.4}{1.2.3} \cdot \frac{3.2}{1.2} \cdot \left(\begin{matrix} 1.4.5 \\ -2.4 \\ +1 \end{matrix}\right) \cdot \frac{4.3.2}{10.9..3} = \frac{13}{1260}$.

LXXXV.

Problême IV. Sur le nombre total m des chances dépendantes d'un état de choses donné, on en nomme une partie au nombre n, assignant à chacune une place déterminée ; il en doit arriver successivement une à une, un nombre p : on demande quelle est la probabilité que parmi les p chances qui arriveront, il s'en trouve un nombre t juste de celles qu'on a nommées chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée, & un nombre r au moins de celles qu'on a nommées ; chacune à la place qui lui a été assignée.

Solut. Pour avoir le numérateur de la probabilité cherchée, j'observe qu'il doit être composé des produits suivants, savoir ;

1°. Du nombre de manieres dont il peut arriver r juste des chances nommées chacune dans la place qui lui a été assignée, & t juste des nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée : Or, ce nombre de manieres est comme on vient de le voir par la solution du problême précédent

$$\frac{\overline{n-r} \ldots\ldots \overline{n-r-t+1}}{1.2\ldots\ldots t} \left\{ \begin{matrix} 1 & \cdot\, \overline{p-r-t+1} \ldots\ldots \overline{p-r} \\ -t & \cdot\, \overline{p-r-t+1} \ldots\ldots \overline{p-r-1} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} & \cdot\, \overline{p-r-t+1} \ldots\ldots \overline{p-r-2} \\ -+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 & \end{matrix} \right\} \cdot$$

$$\frac{n \ldots\ldots \overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r} \cdot \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+r+t+1};$$

2°. Du nombre de manieres dont il peut arriver $\overline{r+1}$ juſte des chances nommées chacune à la place qui lui lui a été aſſignée, & t juſte des nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée : or ce nombre de manieres eſt

$$\frac{\overline{n-r-1}\ldots\ldots\overline{n-r-t}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{matrix} 1 & .\overline{p-r-t}\ldots\ldots\overline{p-r-1} \\ -t & .\overline{p-r-t}\ldots\ldots\overline{p-r-2} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} & .\overline{p-r-t}\ldots\ldots\overline{p-r-3} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \pm 1 & \end{matrix}\right\}.$$

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r}}{1.2\ldots\ldots\overline{r+1}}.\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+t+2};$$

3°. Du nombre de manieres dont il peut arriver $\overline{r+2}$ juſte des chances nommées chacune à la place qui lui a été aſſignée, & t juſte des chances nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée : or ce nombre de manieres eſt

$$\frac{\overline{n-r-2}\ldots\ldots\overline{n-r-t-1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{matrix} 1 & .\overline{p-r-t-1}\ldots\ldots\overline{p-r-2} \\ -t & .\overline{p-r-t-1}\ldots\ldots\overline{p-r-3} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} & .\overline{p-r-t-1}\ldots\ldots\overline{p-r-4} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \pm 1 & \end{matrix}\right\}.$$

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r-1}}{1.2\ldots\ldots\overline{r+2}}.\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+t+3}$$

ainſi de ſuite :

Et enfin du nombre de manieres dont il peut arriver $\overline{n-t}$ juſte des chances nommées, chacune à la place qui lui a été aſſignée, & t juſte des nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée ; or, ce nombre de manieres eſt

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \,.\, \overline{p-n+1} \ldots \overline{p-n+t} \\ -t \,.\, \overline{p-n+1} \ldots \overline{p-n+t-1} \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \,.\, \overline{p-n+1} \ldots \overline{p-n+t-2} \\ -+ \ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\} . \frac{n \ldots \overline{t+1}}{1.2 \ldots \overline{n-t}} .$$

$$\overline{m-n} \ldots \overline{m-p+1} .$$

Donc le numérateur de la probabilité cherchée est la somme de tous ces produits particuliers : & par conséquent cette probabilité est

$$\left[\frac{\overline{n-r} \ldots \overline{n-r-t+1}}{1.2 \ldots t} \left\{\begin{array}{l} 1 \,.\, \overline{p-r-t+1} \ldots \overline{p-r} \\ -t \,.\, \overline{p-r-t+1} \ldots \overline{p-r-1} \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \,.\, \overline{p-r-t+1} \ldots \overline{p-r-2} \\ -+ \ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\} .\right.$$

$$\frac{n \ldots \overline{n-r+1}}{1.2 \ldots r} . \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+r+t+1} +$$

$$\frac{\overline{n-r-1} \ldots \overline{n-r-t}}{1.2 \ldots t} . \left\{\begin{array}{l} 1 \,.\, \overline{p-r-t} \ldots \overline{p-r-1} \\ -t \,.\, \overline{p-r-t} \ldots \overline{p-r-2} \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \,.\, \overline{p-r-t} \ldots \overline{p-r-3} \\ -+ \ldots \\ \pm \end{array}\right\} .$$

$$\frac{n \ldots \overline{n-r}}{1.2 \ldots \overline{r+1}} . \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+r+t+2}$$

$$+ \ldots +$$

$$\frac{n \ldots \overline{t+1}}{1 \ldots \overline{n-t}} . \left\{\begin{array}{l} 1 \,.\, \overline{p-n+1} \ldots \overline{p-n+t} \\ -t \,.\, \overline{p-n+1} \ldots \overline{p-n+t-1} \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \,.\, \overline{p-n+1} \ldots \overline{p-n+t-2} \\ -+ \ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\} .$$

$$\left.\overline{m-n} \ldots \overline{m-p+1}\right] : m \ldots \overline{m-p+1} .$$ C.Q.F.T.

LXXXVI.

Exemple. Si ſur 12 cartes données on en nomme 8, aſſignant à chacune une place déterminée ; & qu'enſuite on en tire 10 une à une ; & qu'on deſire que dans les 10 cartes tirées, il s'en trouve 2 juſte des nommées ailleurs qu'aux places qui leur ont été aſſignées, & 4 au moins des nommées, chacune à la place qui lui a été aſſignée : pour avoir la probabilité du hazard deſiré, dans la formule générale ci-deſſus, je fais $m = 12$, $n = 8$, $p = 10$, $r = 4$, $t = 2$: & elle devient

$$\left[\frac{4\cdot3}{1\cdot2}\cdot\begin{pmatrix}1\cdot5\cdot6\\-2\cdot5\\+1\end{pmatrix}\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1+\right.$$

$$\frac{3\cdot2}{1\cdot2}\cdot\begin{pmatrix}1\cdot4\cdot5\\-2\cdot4\\+1\end{pmatrix}\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot4\cdot3\cdot2+$$

$$\left.\frac{2\cdot1}{1\cdot2}\cdot\begin{pmatrix}1\cdot3\cdot4\\-2\cdot3\\+1\end{pmatrix}\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot4\cdot3\right]:12.11\ldots.3$$

$$=\frac{793}{12800}.$$

LXXXVII.

Problême V. Les mêmes ſuppoſitions étant faites que dans le Problême précédent : Trouver la probabilité que dans les p chances arrivantes, il y en aura un nombre t juſte de celles qu'on a nommées chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée, & un nombre r au plus des nommées, chacune à la place qui lui a été aſſignée.

Solut. Pour avoir le numérateur de la probabilité cherchée, j'obſerve qu'il doit être compoſé des produits ſuivants, ſavoir ;

1°. Du nombre de manieres dont il peut arriver o juſte des chances nommées chacune dans la place qui lui a été aſſignée, & t juſte des nommées,

chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée: or, ce nombre de manieres eſt

$$\frac{n \ldots\ldots \overline{n-t+1}}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots t} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \cdot\; \overline{p-t+1} \ldots\ldots p \\ -\,t \quad \cdot\; \overline{p-t+1} \ldots\ldots \overline{p-1} \\ +\,\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} \cdot \overline{p-t+1} \ldots\ldots \overline{p-2} \\ -+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm\, 1 \end{array} \right\} \cdot$$

$\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+t+1}$;

2°. Du nombre de manieres dont il peut arriver 1 juſte d'entre les nommées, à la place qui lui a été aſſignée; & t juſte des nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée: or, ce ce nombre de manieres eſt

$$\frac{\overline{n-1} \ldots\ldots \overline{n-t}}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots t} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \cdot\; \overline{p-t} \ldots\ldots \overline{p-1} \\ -\,t \quad \cdot\; \overline{p-t} \ldots\ldots \overline{p-2} \\ +\,\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} \cdot \overline{p-t} \ldots\ldots \overline{p-3} \\ -+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm\, 1 \end{array} \right\} \cdot$$

$n \,.\, \overline{m-n} \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{m-n-p+t+2}$;

ainſi de ſuite: & enfin,

Du nombre de manieres dont il peut arriver r juſte des nommées, chacune à la place qui lui a été aſſignée, & t juſte des nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée: or, ce nombre de manieres eſt

$$\frac{\overline{n-r} \ldots\ldots \overline{n-r-t+1}}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots t} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \cdot\; \overline{p-r-t+1} \ldots\ldots \overline{p-r} \\ -\,t \quad \cdot\; \overline{p-r-t+1} \ldots\ldots \overline{p-r-1} \\ +\,\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} \cdot \overline{p-r-t+1} \ldots\ldots \overline{p-r-2} \\ -+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm\, 1 \end{array} \right\} \cdot$$

$\frac{n \ldots\ldots \overline{n-r+1}}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots r} \cdot \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+r+t+1}$;

Donc le numérateur de la probabilité cherchée

eſt

eſt la ſomme de tous ces produits ; & par conſéquent cette probabilité eſt

$$\left[\frac{n\ldots\ldots\overline{n-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{ll}1 & .\overline{p-t+1}\ldots\ldots p\\ -t & .\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-1}\\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} & .\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-2}\\ -+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm 1 & \end{array}\right\}\cdot\right.$$

$$\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+1}$$

$$+\frac{\overline{n-1}\ldots\ldots\overline{n-t}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{ll}1 & .\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-1}\\ -t & .\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-2}\\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} & .\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-3}\\ -+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm 1 & \end{array}\right\}\cdot$$

$$n.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+2}$$

$$+\frac{\overline{n-2}\ldots\overline{n-t-1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{ll}1 & .\overline{p-t-1}\ldots\overline{p-2}\\ -t & .\overline{p-t-1}\ldots\overline{p-3}\\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} & .\overline{p-t-1}\ldots\overline{p-4}\\ -+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm & \end{array}\right\}\cdot$$

$$\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+3}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$\frac{\overline{n-r}\ldots\overline{n-r-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{ll}1 & .\overline{p-r-t+1}\ldots\overline{p-r}\\ -t & .\overline{p-r-t+1}\ldots\overline{p-r-1}\\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} & .\overline{p-r-t+1}\ldots\overline{p-r-2}\\ -+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm 1 & \end{array}\right\}\cdot$$

$$\left.\frac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+t+1}\right]:$$

$$m\ldots\ldots\overline{m-p+1}.$$ C. Q. F. T.

LXXXVIII.

Exemple. Si ſur 12 cartes données on en

nomme 8, affignant à chacune une place déterminée; & qu'enfuite on en tire 10 une à une, & qu'on defire que dans les 10 cartes tirées il s'en trouve 2 jufte des nommées ailleurs qu'aux places qui leur ont été affignées, & 3 au plus des nommées, chacune à la place qui lui a été affignée: pour avoir la probabilité du hazard defiré, dans la formule générale ci-deffus, je fais $m = 12$, $n = 8$, $p = 10$, $r = 3$, $t = 2$: & elle devient

$$\left[\frac{8.7}{1.2}\cdot\begin{pmatrix}1.9.10\\-2\,9\\+1\end{pmatrix}.1.4.3.2.1.0.-1.-2.-3 \;+\right.$$

$$\frac{7.6}{1.2}\cdot\begin{pmatrix}1.8.9\\-2.8\\+1\end{pmatrix}.8.4.3.2.1.0.-1.-2 \;+$$

$$\frac{6.5}{1.2}\cdot\begin{pmatrix}1.7.8\\-2.7\\+1\end{pmatrix}\cdot\frac{8.7}{1.2}4.3.2.1.0.-1 \;+$$

$$\left.\frac{5.4}{1.2}\cdot\begin{pmatrix}1.6.7\\-2.6\\+1\end{pmatrix}\cdot\frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot 4.3.2.1.0\right] : 12 \ldots 3 = 0:$$

d'où l'on voit que le hazard defiré eft impoffible.

LXXXIX.

Remarque Ire. Si dans les formules générales trouvées aux Problêmes 3e, 4e, & 5e, on fait $t = o$; elles deviennent 1°.

$$\frac{n.\overline{n-1}\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots r}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+1}}{m\ldots\ldots\ldots\ldots\overline{m-p+1}};$$

2°.

$$\left[\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots r}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+1}\right.$$

$$+\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r}}{1.2\ldots\ldots\overline{r+1}}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+2}$$

$$+ \frac{n \ldots\ldots \overline{n-r-1}}{1.2 \ldots\ldots \overline{r+2}} . \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+r+3}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ 1 . \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p+1} \,] : m \ldots\ldots \overline{m-p+1} \,;$$

3°.

$$[\; 1 . \overline{m-n} \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{m-n-p+1}$$

$$+ n . \overline{m-n} \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{m-n-p+2}$$

$$+ \frac{n . \overline{n-1}}{1 . 2} . \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+3}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{n \ldots\ldots \overline{n-r+1}}{1.2 \ldots\ldots r} . \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+r+1} \;] :$$

$$m \ldots\ldots \overline{m-p+1} \,;$$

qui sont les probabilités qu'aucune des chances nommées n'arrivant allieurs qu'à la place qui lui a été assignée; il se trouvera parmi les p chances arrivantes, le nombre r $\left\{\begin{array}{l}\text{juste}\\ \text{au moins}\\ \text{au plus}\end{array}\right\}$ d'entre les n chances nommées, chacune dans la place qui lui aura été assignée.

Et si dans la premiere de ces expressions on substitue successivement à r tous les nombres entiers depuis o jusqu'à n inclusivement, on aura,

4°.

$$[\; \overline{m-n} \ldots\ldots\ldots \overline{m-n-p+1} \;+$$

$$n . \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+2} \;+$$

$$\frac{n . \overline{n-1}}{1 . 2} . \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+3} \;+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$1 . \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p+1} \;] : m \ldots\ldots\ldots \overline{m-p+1} \,;$$

pour la probabilité qu'aucune des chances nom-

mées n'arrivera ailleurs que dans la place qui lui aura été assignée.

X C.

PROBLÊME VI. Les mêmes choses étant supposées que dans les Problêmes précédents : on demande quelle est la probabilité que parmi les p chances arrivantes, il s'en trouvera un nombre r juste d'entre les n nommées, chacune à la place qui lui a été assignée, & un nombre t (au moins / au plus) d'entre les n nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée.

SOLUT. 1°. Dans l'expression générale trouvée au problême 3e. substituez successivement à t tous les nombres entiers depuis t jusqu'à $\overline{n-r}$ inclusivement : & elle devient

$$\frac{n \ldots\ldots \overline{n-r+1}}{1.2 \ldots\ldots r . m \ldots\ldots \overline{m-p+1}} \cdot \Big[$$

$$\left\{\begin{array}{l} \quad 1 \;\; . \overline{p-r-t+1} \ldots\ldots \overline{p-r} \\ \; - t . \overline{p-r-t+1} \ldots\ldots \overline{p-r-1} \\ + \frac{t.\overline{t-1}}{1.2} . \overline{p-r-t+1} \ldots\ldots \overline{p-r-2} \\ - + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\} \cdot \frac{\overline{n-r} \ldots\ldots \overline{n-r-t+1}}{1.2 \ldots\ldots t} \cdot$$

$$\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+r+t+1} \quad +$$

$$\left\{\begin{array}{l} \quad\;\; 1 \quad . \overline{p-r-t} \ldots\ldots \overline{p-r} \\ - \overline{t+1} . \overline{p-r-t} \ldots\ldots \overline{p-r-1} \\ + \frac{t.\overline{t+1}}{1.2} . \overline{p-r-t} \ldots\ldots \overline{p-r-2} \\ - + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\} \cdot \frac{\overline{n-r} \ldots\ldots \overline{n-r-t}}{1.2 \ldots\ldots \overline{t+1}} \cdot$$

$$\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+r+t+2} \quad +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$\left\{\begin{array}{l} \quad 1 \cdot \overline{p-n+1} \ldots\ldots \overline{p-r} \\ -\overline{n-r} \cdot \overline{p-n+1} \ldots\ldots \overline{p-r-1} \\ +\frac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2} \cdot \overline{p-n+1} \ldots \overline{p-r-2} \\ \mp \quad \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\} \cdot \overline{m-n} \ldots \overline{m-p+1} \Big]$$

qui eſt la 1ᵉ. probabilité cherchée.

2°.

Dans la même formule génerale trouvée au Problême 3ᵉ. ſubſtituez ſucceſſivement à t tous les nombres entiers depuis o juſqu'à t, incluſivement : & elle devient $\frac{n \ldots\ldots \overline{n-r+1}}{1.2 \ldots r.m \ldots\ldots \overline{m-p+1}} \cdot \Big[$

$$1 \cdot \left\{ 1 \right\} \cdot \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+r+1} +$$

$$\overline{n-r} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot \overline{p-r} \\ -1 \end{array} \right\} \cdot \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+r+2} +$$

$$\frac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot \overline{p-r-1} \ldots \overline{p-r} \\ -2 \cdot \overline{p-r-1} \\ +1 \end{array} \right\} \cdot \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+r+3}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \quad \cdot \overline{p-r-t+1} \ldots\ldots \overline{p-r} \\ -t \quad \cdot \overline{p-r-t+1} \ldots\ldots \overline{p-r-1} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} \cdot \overline{p-r-t+1} \ldots\ldots \overline{p-r-2} \\ \mp \quad \pm \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array} \right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{\overline{n-r} \ldots\ldots \overline{n-r-t+1}}{1.2 \ldots t} \cdot \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+r+t+1} \Big]$$

qui eſt la 2ᵉ. probabilité cherchée.

X C I.

REMARQUE 2ᵉ. Si dans les formules générales trouvées aux Problêmes 3ᵉ. & 6ᵉ. on fait $r = 0$, elles deviennent 1°.

$$\frac{n \ldots\ldots \overline{n-t+1}}{1.2 \ldots\ldots t} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad . \overline{p-t+1} \ldots\ldots p \\ -t \quad . \overline{p-t+1} \ldots\ldots \overline{p-1} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} . \overline{p-t+1} \ldots\ldots \overline{p-2} \\ -+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array} \right\} .$$

$$\frac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+t+1}}{m \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{m-p+1}};$$

2°.

$$\left[\frac{n \ldots\ldots \overline{n-t+1}}{1.2 \ldots\ldots t} . \overline{m-n} \ldots\ldots\ldots \overline{m-n-p+t+1} . \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 . \overline{p-t+1} \ldots\ldots p \\ -t . \overline{p-t+1} \ldots\ldots \overline{p-1} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} . \overline{p-t+1} \ldots\ldots \overline{p-2} \\ -+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array} \right\} +$$

$$\frac{n \ldots\ldots \overline{n-t}}{1.2 \ldots\ldots \overline{t+1}} . \overline{m-n} \ldots\ldots\ldots \overline{m-n-p+t+2} .$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 . \overline{p-t} \ldots\ldots p \\ -\overline{t+1} . \overline{p-t} \ldots\ldots \overline{p-1} \\ +\frac{\overline{t+1}.t}{1.2} . \overline{p-t} \ldots\ldots \overline{p-2} \\ -+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array} \right\} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad +$$

$$1 . \overline{m-n} \ldots\ldots\ldots \overline{m-p+1} .$$

$$\left. \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad . \overline{p-n+1} \ldots p \\ -n \quad . \overline{p-n+1} \ldots \overline{p-1} \\ +\frac{n.\overline{n-1}}{1.2} . \overline{p-n+1} \ldots \overline{p-2} \\ -+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array} \right\} \right] : m \ldots \overline{m-p+1} .$$

3°.

$$\Big(1 \, . \left\{ 1 \right\} . \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+1} +$$

$$n \, . \left\{ \begin{matrix} 1 \, . \, p \\ -1 \end{matrix} \right\} . \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+2} +$$

$$\frac{n.\overline{n-1}}{1.2} . \left\{ \begin{matrix} 1.\overline{p-1}.p \\ -\,2.\overline{p-1} \\ +\,1 \end{matrix} \right\} . \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+3} +$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad +$$

$$\frac{n \ldots\ldots \overline{n-t+1}}{1.2 \ldots\ldots t} . \left\{ \begin{matrix} 1.\overline{p-t+1} \ldots\ldots \overline{p} \\ -\,t.\overline{p-t+1} \ldots\ldots \overline{p-1} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2}.\overline{p-t+1} \ldots\ldots \overline{p-2} \\ -+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{matrix} \right\} .$$

$$\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+t+1} \Big) : m \ldots\ldots \overline{m-p+1} \, .$$

qui font les probabilités qu'aucune des chances nommées n'arrivant à la place qu'on lui a assignée, il se trouvera parmi les p chances arrivantes le nombre t $\left\{ \begin{matrix} \text{juste} \\ \text{au moins} \\ \text{au plus} \end{matrix} \right\}$ d'entre les n chances nommées chacune ailleurs qu'à la place qui lui aura été assignée.

Et si dans la premiere de ces formules, on substitue successivement à t tous les nombres entiers depuis o jusqu'à n inclusivement, on aura 4°. la formule déja trouvée (LXXVII.) pour la probabilité qu'aucune des chances nommées n'arrivera dans la place qui lui a été assignée.

XCII.

Remarque III. 1°. Si dans la formule générale trouvée au problême 4e. on substitue successivement

à t tous les nombres entiers depuis $\left(\overset{t}{o}\right.$ jusqu'à $\left.\overset{\overline{n-r}}{t}\right)$ inclusivement, & qu'on ajoute ensemble tous les produits qui en naîtront : on aura pour somme la probabilité que dans les p chances arrivantes il s'en trouvera (au moins / au plus) t, d'entre les n nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée; & un nombre r au moins d'entre les n nommées chacune à la place qui lui a été assignée.

2°. Si dans la formule générale trouvée au problême 5e. on substitue successivement à t tous les nombres entiers depuis $\left(\overset{t}{o}\right.$ jusqu'à $\left.\overset{n}{t}\right)$ inclusivement ; & qu'on prenne la somme de tous les produits qui en résulteront : cette somme sera la probabilité que dans les p chances arrivantes il s'en trouvera (au moins / au plus) t d'entre les n nommées chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée : & un nombre r au plus d'entre les n nommées, chacune à la place qui lui a été assignée.

On trouveroit les mêmes probabilités, si dans la premiere formule du problême 6e. on substituoit successivement à r tous les nombres entiers depuis $\left(\overset{r}{o}\right.$ jusqu'à $\left.\overset{\overline{n-t}}{r}\right)$ inclusivement, en prenant la somme de tous les produits qui en résulteroient : & si dans la 2e. formule du même problême 6e. on substituoit successivement à r tous les nombres entiers depuis $\left(\overset{r}{o}\right.$ jusqu'à $\left.\overset{n}{r}\right)$, & qu'on prit la somme de tous les produits qui en résulteroient.

XCIII.

Problême VII. Les mêmes choses étant sup-

posées que dans les problêmes précédents, trouver la probabilité qu'il arrivera un nombre t juste d'entre les n chances nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée.

Solut. Dans la formule générale trouvée au Problême 3e. je substitue successivement à r tous les nombres entiers depuis o jusqu'à $\overline{n-t}$ inclusivement, & j'ai pour la probabilité cherchée :

$$\left(1\,\frac{n\ldots\overline{n-t+1}}{1.2\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots p \\ -t\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2}\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot\right.$$

$$\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+t+1} \quad +$$

$$n\cdot\frac{\overline{n-1}\ldots\overline{n-t}}{1.2\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\cdot\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ -t\cdot\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2}\cdot\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-3} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot$$

$$\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+t+2} \quad +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad +$$

$$\frac{n\ldots\overline{t+1}}{1.2\ldots\overline{n-t}}\cdot 1\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t} \\ -t\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t-1} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot$$

$$\left.\overline{m-n}\ldots\overline{m-p+1}\right) : m\ldots\overline{m-p+1} \quad C.\,Q.\,F.\,T.$$

XCIV.

Remarque IV. Si dans la formule générale ci-dessus on substitue successivement à t tous les nombres entiers depuis $\left(\begin{smallmatrix} t \\ o \end{smallmatrix}\right.$ jusqu'à $\left.\begin{smallmatrix} n \\ t \end{smallmatrix}\right)$ inclusivement, & qu'on prenne la somme de tous les produits ré-

fultants de ces fubftitutions : cette fomme fera la probabilité que parmi les p chances arrivantes il s'en trouvera $\left(\begin{array}{c}\text{au moins}\\ \text{au plus}\end{array}\right)$ t d'entre les n nommées, qui feront chacune ailleurs qu'à la place qui lui aura été affignée en la nommant.

XCV.

Problême VIII. Les mêmes chofes étant fuppofées que dans les Problêmes précédents : on demande la probabilité qu'il arrivera un nombre r jufte d'entre les chances nommées, lefquelles feront chacune à la place qui lui a été affignée.

Solut. Dans la formule générale trouvée au Problême 3e. je fubftitue fucceffivement à t tous les nombres entiers depuis o jufqu'à $\overline{n-r}$ inclufivement : j'ajoute enfemble tous les produits qui réfultent de cette fubftitution ; & j'ai pour fomme

$$\frac{n \ldots \overline{n-r+1}}{1.2 \ldots r} \cdot \Big[1 \left\{ 1 \right\} . \overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-n-p+r+1}$$

$$+ \overline{n-r} . \left\{ \begin{array}{l} 1 . \overline{p-r} \\ -1 \end{array} \right\} . \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+r+2} +$$

$$\frac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2} . \left\{ \begin{array}{l} 1 . \overline{p-r-1}.\overline{p-r} \\ -2 . \overline{p-r-1} \\ +1 \end{array} \right\} . \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+r+3}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$1 . \left\{ \begin{array}{l} 1 . \overline{p-n+1} \ldots \overline{p-r} \\ - \overline{n-r} . \overline{p-n+1} \ldots \overline{p-r-1} \\ + \frac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2} . \overline{p-n+1} \ldots \overline{p-r-2} \\ \mp \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array} \right\} . \overline{m-n} \ldots \overline{m-p+1} \Big] :$$

$m \ldots\ldots \overline{m-p+1}$; qui eft la probabilité cherchée.

XCVI.

Problême IX. Les mêmes choses étant supposées que dans les Problêmes précédents, on demande la probabilité qu'il arrivera un nombre r au moins d'entre les chances nommées, lesquelles seront chacune à la place qui lui a été assignée.

Solut. Dans la formule générale trouvée au Problême précédent, je substitue successivement à r tous les nombres entiers depuis r jusqu'à n inclusivement, j'ajoute ensemble tous les produits résultants de ces substitutions, & j'ai pour somme

$$\left(\frac{n \ldots \overline{n-r+1}}{1.2 \ldots r} . \left[1. \left\{ 1 \right\} . \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+r+1} + \right.\right.$$

$$\overline{n-r} . \left\{ \begin{matrix} 1.\overline{p-r} \\ -1 \end{matrix} \right\} . \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+r+2} +$$

$$\frac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2} . \left\{ \begin{matrix} 1.\overline{p-r-1}.\overline{p-r} \\ -2.\overline{p-r-1} \\ +1 \end{matrix} \right\} . \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+r+3} +$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots +$$

$$1. \left\{ \begin{matrix} 1 & .\overline{p-n+1} \ldots \overline{p-r} \\ -\overline{n-r} & .\overline{p-n+1} \ldots \overline{p-r-1} \\ +\frac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2} & .\overline{p-n+1} \ldots \overline{p-r-2} \\ -+ \ldots \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ \pm 1 & \end{matrix} \right\} . \overline{m-n} \ldots \overline{m-p+1} \Big]$$

$$+ \frac{n \ldots \overline{n-r}}{1.2 \ldots \overline{r+1}} . \left[1. \left\{ 1 \right\} . \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+r+2} + \right.$$

$$\overline{n-r-1} . \left\{ \begin{matrix} 1.\overline{p-r-1} \\ -1 \end{matrix} \right\} . \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+r+3} +$$

$$\frac{\overline{n-r-1}.\overline{n-r-2}}{1.2} . \left\{ \begin{matrix} 1.\overline{p-r-2}.\overline{p-r-1} \\ -2.\overline{p-r-2} \\ +1 \end{matrix} \right\} . \overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+r+4} +$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots +$$

$$1.\left\{\begin{array}{l} \quad 1 \quad\quad\quad\quad\;\; .\,\overline{p-n-1}\,\ldots\ldots\,\overline{p-r-1} \\ -\,\overline{n-r-1}\;.\,\overline{p-n-1}\,\ldots\ldots\,\overline{p-r-2} \\ +\,\frac{\overline{n-r-1}\,.\,\overline{n-r-2}}{1\,.\,2}\;.\,\overline{p-n-1}\,\ldots\ldots\,\overline{p-r-3} \\ -+\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}.$$

$$\overline{m-n}\,\ldots\ldots\,\overline{m-p+1}\;]$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+\frac{n\,.\,\overline{n-1}}{1\,.\,2}\,.\,\Big[1.\left\{1\right\}\overline{m-n}\,\ldots\ldots\ldots\,\overline{m-p-1}\;+$$

$$2\,.\left\{\begin{array}{l}1\,.\,\overline{p-n+2}\\ -\,1\end{array}\right\}.\,\overline{m-n}\,\ldots\ldots\,\overline{m-p}\;+$$

$$1.\left\{\begin{array}{l}1\,.\,\overline{p-n+1}\,.\,\overline{p-n+2}\\ -\,2\,.\,\overline{p-n+1}\\ +\,1\end{array}\right\}.\,\overline{m-n}\,\ldots\,\overline{m-p+1}\;\Big]$$

$$+n\,.\,\Big[\,1\,.\left\{1\right\}.\,\overline{m-n}\,\ldots\ldots\ldots\,\overline{m-p}\;+$$

$$1\,.\left\{\begin{array}{l}1\,.\,\overline{p-n+1}\\ -1\end{array}\right\}.\,\overline{m-n}\,\ldots\ldots\ldots\,.\,\overline{m-p+1}\;\Big]$$

$$+\,1\,.\,\Big[\,1\,.\left\{1\right\}.\,\overline{m-n}\,\ldots\ldots\,\overline{m-p+1}\Big]\Big)\;:\;m\ldots\,\overline{m-p+1}$$

qui eſt la probabilité cherchée.

XCVII.

Problême X. Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans les Problêmes précédents, on demande la probabilité qu'il arrivera un nombre r au plus d'entre les chances nommées, leſquelles ſeront chacune à la place qui lui a été aſſignée.

Solut. Dans la formule générale trouvée au Problême 8e. je ſubſtitue ſucceſſivement à r tous les nombres entiers depuis o juſqu'à r incluſivement : j'ajoute enſemble les produits réſultants de ces ſubſtitutions, &. j'ai pour ſomme, ...

$$\Big(1\,.\,\Big[\,1\,.\left\{1.\right\}.\,\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+1}\ +$$

$$n\,.\left\{\begin{matrix}1\,.\,p\\-1\end{matrix}\right\}.\,\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+2}\ +$$

$$\frac{n\,.\,\overline{n-1}}{1\,.\,2}.\left\{\begin{matrix}1\,.\,\overline{p-1}\,.\,p\\-2\,.\,\overline{p-1}\\+1\end{matrix}\right\}.\,\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+3}\ +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ +$$

$$1\,.\left\{\begin{matrix}1\,.\,\overline{p-n+1}\ldots p\\-n\,.\,\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-1}\\+\frac{n\,.\,\overline{n-1}}{1\,.\,2}.\,\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-2}\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\+1\end{matrix}\right\}.\,\overline{m-n}\ldots\overline{m-p+1}\ \Big]$$

$$+\,n\,.\,\Big[\,1\,.\left\{1\right\}.\ \overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+2}\ +$$

$$\overline{n-1}\,.\left\{\begin{matrix}1\,.\,\overline{p-1}\\-1\end{matrix}\right\}.\ \overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+3}\ +$$

$$\frac{\overline{n-1}\,.\,\overline{n-2}}{1\,.\,2}.\left\{\begin{matrix}1\,.\,\overline{p-2}\,.\,\overline{p-1}\\-2\,.\,\overline{p-1}\\+1\end{matrix}\right\}.\,\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+4}\ +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ +$$

$$1\,.\left\{\begin{matrix}1\,.\,\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-1}\\-\,\overline{n-1}\,.\,\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-2}\\+\frac{\overline{n-1}\,.\,\overline{n-2}}{1\,.\,2}.\,\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-3}\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{matrix}\right\}.\,\overline{m-n}\ldots\overline{m-p+1}\ \Big]$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\,\frac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1\,.\,2\ldots r}\Big[\,1\,.\left\{1\right\}.\,\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+1}\ +$$

$$\overline{n-r}\,.\left\{\begin{matrix}1\,.\,\overline{p-r}\\-1\end{matrix}\right\}.\,\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+2}\ +$$

$$\frac{\overline{n-r}\,.\,\overline{n-r-1}}{1\,.\,2}\left\{\begin{matrix}\overline{p-r-1}\,.\,\overline{p-r}\\2\,.\,\overline{p-r-1}\\+1\end{matrix}\right\}.\,\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+3}\ +$$

. . . . +

$$1.\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{}.\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-r} \\ -\overline{n-r}.\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-r-1} \\ +\frac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2}.\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-r-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}\ldots\overline{m-p+1}\,]\,):$$

$m \ldots\ldots \overline{m-p+1}$; qui eſt la probabilité cherchée.

XCVIII.

EXEMPLE. Étant données 10 cartes différentes entre leſquelles on en diſtingue 6 qu'on nomme ſecceſſivement une à une, aſſignant à chacune une place déterminée ; ſi enſuite on tire ſucceſſivement une à une 8 des cartes données, & qu'on deſire que dans les 8 cartes tirées il s'en trouve 4 juſte de celles qu'on a diſtinguées, chacune à la place du tirage qui lui a été aſſignée : pour avoir la probabilité du hazard deſiré ; dans l'expreſſion générale trouvée par le Problême 8e. je fais $m=10$, $p=8$, $n=6$, $r=4$, & elle devient . . . .

$$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.\left[1.(1).4.3.2.1+\right.$$

$$\left.4.\left(\begin{array}{c}1.4\\-1\end{array}\right).4.3.2+1.\left(\begin{array}{c}1.3.4\\-2.3\\+1\end{array}\right).4.3\right]:$$

$$10.9.8.7.6.5.4.3=$$

$$\frac{3780}{1814400}=\frac{1}{480}.$$

Si l'on deſire que dans les 8 cartes tirées il s'en trouve au moins 4 des nommées, chacune à la place qui lui a été aſſignée : pour avoir la probabilité du hazard deſiré, je fais les ſubſtitutions ci-deſſus dites dans la formule générale trouvée par le Problême 9e. & elle devient

$$\left\{ \frac{6.5}{1.2} \cdot \left[1.(1).4.3.2.1 + 2.\left(\begin{array}{c} 1.4 \\ -1 \end{array}\right).4.3.2 + 1 \left(\begin{array}{c} 1.3.4 \\ -2.3 \\ +1 \end{array}\right).4.3 \right] . + \right.$$

$$6.\left[1.(1).4.3.2 + .1 \left(\begin{array}{c} 1.3 \\ -1 \end{array}\right).4.3 \right] +$$

$$\left. 1.\left[1.(1).4.3 \right] \right\} : 10.9.8.7.6.5.4.3 =$$

$$\frac{3780 + 288 + 12}{1814400} = \frac{85}{37800}.$$

Enfin, si l'on desire que dans les 8 cartes tirées il s'en trouve au plus 3 des nommées, chacune à la place qui lui a été assignée : pour avoir la probabilité du hazard desiré, je fais les substitutions ci-dessus dites dans la formule générale trouvée par le Problême 10e. & elle devient

$$\left[1.\left(15.\left\{\begin{array}{l} \quad 1.5.6.7.8 \\ -4.5.6.7 \\ +6.5.6 \\ -4.5 \\ +1 \end{array}\right\}.4.3.2.1 + \right.\right.$$

$$6.\left\{\begin{array}{l} \quad 1.4.5.6.7.8 \\ -\ 5.4.5.6.7 \\ +10.4.5.6 \\ -10.4.5 \\ +\ 5.4 \\ -\ 1 \end{array}\right\}.4.3.2 +$$

$$\left. 1.\left\{\begin{array}{l} \quad 1.3.4.5.6.7.8 \\ -\ 6.3.4.5.6.7 \\ +15.3.4.5.6 \\ -20.3.4.5 \\ +15.3.4 \\ -\ 6.3 \\ +\ 1 \end{array}\right\}.4.3 \right) :$$

$$+ 6.\left(10.\left\{\begin{array}{l} \quad 1.5.6.7 \\ -3.5.6 \\ +3.5 \\ -1 \end{array}\right\}.4.3.2.1 + \right.$$

$$5 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \\ - 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ + 6 \cdot 4 \cdot 5 \\ - 4 \cdot 4 \\ + 1 \end{array} \right\} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \; +$$

$$1 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \\ - 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ + 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ - 10 \cdot 3 \cdot 4 \\ + 5 \cdot 3 \\ - 1 \end{array} \right\} \cdot 4 \cdot 3 \;)$$

$$+ 15 \cdot (6 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \cdot 5 \cdot 6 \\ - 2 \cdot 5 \\ + 1 \end{array} \right\} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \; +$$

$$4 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ - 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ + 3 \cdot 4 \\ - 1 \end{array} \right\} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \; +$$

$$1 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ - 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ + 6 \cdot 3 \cdot 4 \\ - 4 \cdot 3 \\ + 1 \end{array} \right\} \cdot 4 \cdot 3 \;)$$

$$+ 20 \cdot (3 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \cdot 5 \\ - 1 \end{array} \right\} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \; +$$

$$3 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \cdot 4 \cdot 5 \\ - 2 \cdot 4 \\ + 1 \end{array} \right\} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \; +$$

$$1 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ - 3 \cdot 3 \cdot 4 \\ + 3 \cdot 3 \\ - 1 \end{array} \right\} \cdot 4 \cdot 3 \;) \;] : 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$= \frac{982182 + 615168 + 180180 + 32160}{1814400}$$

$$= \frac{37715}{37800}.$$

CHAPITRE IV.

CHAPITRE IV.

De la Probabilité des Hazards dans le cas de plusieurs épreuves.

§. XCIX.

Soit qu'un hazard spécifié consiste dans l'arrivée d'une seule d'entre les chances dépendantes d'un état de choses donné ; soit que ce hazard consiste dans l'arrivée d'un certain nombre de ces chances, ou simultanée, ou successive en un ordre quelconque ; soit que ce hazard consiste dans l'arrivée successive d'un certain nombre d'entre ces chances en un ordre déterminé ; soit enfin que la probabilité de ce hazard soit simple, ou qu'elle soit composée de plusieurs autres probabilités : la probabilité de ce hazard peut toujours être représentée par l'expression générale $\frac{n}{m}$, dont le dénominateur m exprimera le nombre total des chances, & le numérateur n le nombre de celles d'entre ces chances qui donnent le hazard spécifié. Or, dans toutes ces hypotheses, il peut arriver deux cas : ou bien l'acte duquel dépend le hazard spécifié n'a lieu qu'une seule fois ; & nous avons, dans les chapitres précédents, déterminé d'une maniere générale quelle est dans ce cas la probabilité du hazard spécifié : ou bien l'acte duquel dépend ce hazard est réitéré un certain nombre N de fois ; ou ce qui est de même, il y a un nombre N d'épreuves (XVI.) de cet acte : il s'agit de déterminer dans ce 2e. cas la

probabilité du hazard ſpécifié, dont la probabilité en une ſeule épreuve, eſt repréſentée par $\frac{n}{m}$: ce ſera la matiere de ce chapitre.

C.

Théorême Ier. Nommant *m* le nombre des chances dépendantes d'un acte, mouvement ou état de choſes donné, dans le cas d'une ſeule épreuve : Je dis que le nombre des chances dépendantes du même acte, mouvement, ou état de choſes dans le cas d'un nombre *N* d'épreuves, eſt m^N.

Démonst. Suppoſant qu'il n'y a que deux épreuves ; chacune des *m* chances données peut arriver à la premiere épreuve ; & quelle que ſoit la chance arrivante à la premiere épreuve, chacune des *m* chances données peut arriver à la ſeconde épreuve : ainſi nommant *a*, *b*, *c*, *d*, — les *m* chances données, toutes les chances poſſibles dans le cas de 2 épreuves ſeront répréſentées par les termes de la table ſuivante, dont le nombre eſt m^2.

a a	*b a*	*c a*	*d a*	—
a b	*b b*	*c b*	*d b*	—
a c	*b c*	*c c*	*d c*	—
a d	*b d*	*c d*	*d d*	—
—	—	—	—	—

De même, quelles que ſoient les chances arrivantes aux deux premieres épreuves, chacune des *m* chances données peut arriver à la 3e. épreuve, & les chances, dans le cas de 3 épreuves, ſont repréſentées par les termes de la table ſuivante, dont le nombre eſt m^3.

a a a	*b a a*	*c a a*	*d a a*	——
a a b	*b a b*	*c a b*	*d a b*	——
a a c	*b a c*	*c a c*	*d a c*	——
a a d	*b a d*	*c a d*	*d a d*	——
——	——	——	——	——
a b a	*b b a*	*c b a*	*d b a*	——
a b b	*b b b*	*c b b*	*d b b*	——
a b c	*b b c*	*c b c*	*d b c*	——
a b d	*b b d*	*c b d*	*d b d*	——
——	——	——	——	——
a c a	*b c a*	*c c a*	*d c a*	——
a c b	*b c b*	*c c b*	*d c b*	——
a c c	*b c c*	*c c c*	*d c c*	——
a c d	*b c d*	*c c d*	*d c d*	——
——	——	——	——	——
a d a	*b d a*	*c d a*	*d d a*	——
a d b	*b d b*	*c d b*	*d d b*	——
a d c	*b d c*	*c d c*	*d d c*	——
a d d	*b d d*	*c d d*	*d d d*	——
——	——	——	——	——
——	——	——	——	——
——	——	——	——	——
——	——	——	——	——
——	——	——	——	——
——	——	——	——	——

ainſi de ſuite : & continuant à raiſonuer de même, ou trouvera qu'en général le nombre des chances dans le cas d'une ſeule épreuve étant m, le nombre des chances dans le cas des N épreuves, eſt m^N. *C. Q. F. D.*

C I.

Coroll. Suppoſant toujours que la probabilité, dans le cas d'une ſeule épreuve, eſt $\frac{n}{m}$, le nombre des chances qui donnent le hazard ſpécifié dans le

cas d'une seule épreuve eſt n, & le nombre des chances qui ne donnent pas ce hazard eſt $\overline{m-n}$: donc le nombre des chances qui donnent le hazard à toutes les épreuves dans le cas de N épreuves eſt n^N, & le nombre des chances qui ne donnent le hazard dans aucune des N épreuves, eſt $(m-n)^N$: d'où l'on conclut 1°. que la probabilité que le hazard ſpécifié aura lieu dans toutes les N épreuves eſt $\frac{n^N}{m^N}$ ou $\left(\frac{n}{m}\right)^N$, propoſition déja démontrée ci-deſſus. (XXVI.) 2°. que la probabilité que le hazard ſpécifié n'aura lieu dans aucune des N épreuves, eſt $\frac{\overline{m-n}^N}{m^N}$ ou $\left(1-\frac{n}{m}\right)^N$.

CII.

Dans le cas de pluſieurs épreuves d'un même acte ou mouvement qui a pluſieurs réſultats poſſibles, la probabilité de chacun de ces réſultats augmente à meſure qu'il y a un plus grand nombre d'épreuves: par exemple, la probabilité d'amener doublet en jettant une ſeule fois ſur une table 2 dés à jouer ordinaires, étant $\frac{1}{6}$; la probabilité d'amener doublet en 3 jets conſécutifs ſemblables doit être plus grande que $\frac{1}{6}$: cependant la probabilité n'augmente pas alors en raiſon du nombre des épreuves; mais comme une certaine fonction combinée de la probabilité en une ſeule épreuve, & du nombre des épreuves. Cette fonction eſt déterminée par le Théorême ſuivant.

CIII.

Théorême II. La probabilité d'un hazard dans le cas de pluſieurs épreuves eſt égale à l'unité moins

la différence de l'unité à la probabilité de ce hazard en une ſeule épreuve, élevée à la puiſſance du degré exprimé par le nombre des épreuves.

Ainſi nommant $\frac{n}{m}$ la probabilité du hazard en une ſeule épreuve, N le nombre des épreuves, P la probabilité du même hazard dans le nombre d'épreuves exprimé par N; on a

$P = 1 - (1 - \frac{n}{m})^N$.

Dem. On vient de voir (CI.) qu'en ſuppoſant que la probabilité du hazard dans le cas d'une ſeule épreuve eſt $\frac{n}{m}$, & que le nombre des épreuves eſt N; la probabilité que le hazard n'arrivera dans aucune des N épreuves, eſt $(1 - \frac{n}{m})^N$: donc la probabilité de l'effet contraire, c'eſt-à-dire, la probabilité que le hazard dont il s'agit, arrivera dans quelqu'une des N épreuves, eſt $1 - (1 - \frac{n}{m})^N$. (XIV & XV.) *C. Q. F. D.*

C I V.

Coroll. I. Étant donnée la probabilité d'un hazard en une ſeule épreuve, on en déduira la probabilité de ce même hazard dans un nombre déterminé N d'épreuves; par conſéquent le rapport des miſes qu'on peut équitablement parier pour & contre ce hazard, & le nombre d'épreuves qui ſont néceſſaires pour qu'il puiſſe être parié avec avantage à miſes égales que ce hazard arrivera:

Par exemple: la probabilité d'amener un doublet par le jet de 2 dés à jouer étant $\frac{1}{6}$; la probabilité d'amener doublet

$$\text{en} \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 4 \\ \&c. \end{cases} \text{jets, est} \begin{cases} 1-\left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ 1-\left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ 1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \\ \&c. \end{cases} = \begin{cases} \frac{11}{36} \\ \frac{91}{216} \\ \frac{671}{1296} \\ \&c. \end{cases};$$

d'où l'on voit, qu'on peut parier avec quelqu'avantage, à mises égales, d'amener doublet en 4 jets de dés, parce que $\frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$; & que pour parier équitablement d'amener doublet en $\begin{cases} 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$ jets, il faut que les mises soient entr'elles

$$:: \begin{Bmatrix} 11 : 25 \\ 91 : 125 \\ 671 : 625 \end{Bmatrix} \text{(XVIII.)}.$$

C V.

COROLL. II. De ces trois quantités : la probabilité d'un hazard en une seule épreuve, le nombre des épreuves, & la probabilité du hazard en ce nombre d'épreuves, deux étant données, déterminent la 3e; car de l'égalité $P = 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N$, on déduit $\frac{n}{m} = 1 \quad \sqrt[N]{1-P}$, & $N = \frac{\log.(1-P)}{\log.\left(1-\frac{n}{m}\right)}$.

C V I.

COROLL. III. Si $n = \frac{m}{2}$: ce qui est le cas du pari équitable à mises égales, en une seule épreuve ; la probabilité du même hazard en un nombre donné N d'epreuves, sera $1 - \frac{1}{2^N}$; car alors la quantité $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N$ devient $1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^N$, ou $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N$, ou $1 - \frac{1}{2^N}$.

CVII.

Coroll. IV. Si le nombre N des épreuves eſt infini, la fraction $(1 - \frac{n}{m})^N$ devient infiniment petite ou nulle ; & alors $P = 1$: d'où l'on voit que le hazard le moins probable dans une ſeule épreuve, ou même dans uu nombre fini d'épreuves, devient certain en ſuppoſant le nombre des épreuves infini.

CVIII.

Coroll. V. Si P ou $1 - (1 - \frac{n}{m})^N = \frac{1}{2}$; on aura $\frac{n}{m} = 1 - \frac{1}{\sqrt[N]{2}}$; d'où l'on voit que ſi un hazard acquiert dans un nombre donné d'épreuves la probabilité $\frac{1}{2}$, la probabilité de ce hazard en une ſeule épreuve eſt incommenſurable :

Et réciproquement, que ſi la probabilité de ce hazard en une ſeule épreuve eſt commenſurable, ce hazard ne peut acquérir exactement la probalité $\frac{1}{2}$ dans un nombre entier déterminé d'épreuves.

CIX.

Théorême III. Suppoſant 1°. que deux hazards différents dépendent d'un même acte ou état de choſes donné ; 2°. que n eſt le nombre des chances qui donnent le 1er. de ces hazards en une ſeule épreuve, que p eſt le nombre des chances qui donnent le 2e. hazard en une ſeule épreuve ; 3°. qu'aucune de ces chances ne donne les deux hazards à la fois : Je dis que le nombre de manieres d'avoir M fois juſte le 1er. hazard, & P fois juſte le 2e. hazard dans un nombre $\overline{M + P}$ d'épreuves, eſt

$$\frac{\overline{M+P} \ldots\ldots \overline{M+1}}{1 \cdot 2 \ldots\ldots P} \cdot n^M \cdot p^P.$$

Dem. Nommant a, b, c, d, — les n chances qui donnent le 1er. hazard dans le cas d'une seule épreuve, a^1, b^1, c^1, d^1 — les p chances qui donnent le 2e. hazard dans le cas d'une seule épreuve; on vient de voir, par le Théorême 1er, que le nombre de manieres dont le 1er. hazard peut toujours arriver en M épreuves est n^M, & que le nombre de manieres dont le 2e. hazard peut toujours arriver en P épreuves, est p^P.

$$\text{Or si } P = \left\{\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \dots \\ P \end{array}\right. \text{; les} \left\{\begin{array}{l} 1 \\ 1 \text{ ou } 2 \\ 1, 2 \text{ ou } 3 \\ 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \\ \dots\dots \\ 1, 2, 3 \dots \text{ ou } P \end{array}\right.$$

chances qui composent chacune des

$$\left\{\begin{array}{l} p \\ p^2 \\ p^3 \\ p^4 \\ \dots\dots \\ p^P \end{array}\right. \text{manieres, dont quelques unes d'entre les } p$$

chances a^1, b^1, c^1 d^1, — peuvent toujours arriver en

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ . \\ P \end{array}\right. \text{épreuves, peuvent sans aucune interruption}$$

d'ordre entr'elles, être mêlées avec les chances qui donnent le 1er. hazard, & arriver dans les

{1, 2e, 3e, 4e, — $\overline{M+1}$e.}
{1e & 2e, 1e & 3e, 1e & 4e, — 1e & $\overline{M+2}$e.
2e & 3e, 2e & 4e, —
3e & 4e, —
—}
{1e, 2e & 3e; 1e, 2e & 4e; —
1e, 3e & 4e; —
2e, 3e & 4e; —
—}
{1e, 2e, 3e & 4e; —
—}

épreuves; ce qui peut se faire de

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{M+1} \\ \dfrac{\overline{M+2}.\overline{M+1}}{1.2} \\ \dfrac{\overline{M+3}.\overline{M+2}.\overline{M+1}}{1.2.3} \\ \dfrac{\overline{M+4}.\overline{M+3}.\overline{M+2}.\overline{M+1}}{1.2.3.4} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\overline{M+P}\ldots\ldots\overline{M+1}}{1.2\ldots\ldots P}; \end{array}\right\} \text{manieres};$$

donc le nombre de manieres dont le 1er. hazard peut arriver M fois, & le 2e. P fois dans $\overline{M+P}$ épreuves est $\dfrac{\overline{M+P}\ldots\overline{M+1}}{1.2\ldots\ldots P}.n^M.p^P$; *C.Q.F.D.*

Comme cette démonstration pourroit paroître trop abstraite à quelques lecteurs; pour la rendre plus sensible, je l'applique à un cas particulier.

Je suppose que $n=3$, $p=4$, $M=3$, $P=2$; toutes les manieres dont le 1er hazard peut arriver en trois épreuves sont représentées par les termes de la table suivante;

a a a	*b a a*	*c a a*
a a b	*b a b*	*c a b*
a a c	*b a c*	*c a c*
a b a	*b b a*	*c b a*
a b b	*b b b*	*c b b*
a b c	*b b c*	*c b c*
a c a	*b c a*	*c c a*
a c b	*b c b*	*c c b*
a c c	*b c c*	*c c c*

qui font au nombre de 3^3.

Toutes les manieres d'amener le 2e. hazard en 2 épreuves sont représentées par les termes de la table suivante,

$a^1\ a^1$	$b^1\ a^1$	$c^1\ a^1$	$d^1\ a^1$
$a^1\ b^1$	$b^1\ b^1$	$c^1\ b^1$	$d^1\ b^1$
$a^1\ c^1$	$b^1\ c^1$	$c^1\ c^1$	$d^1\ c^1$
$a^1\ d^1$	$b^1\ d^1$	$c^1\ d^1$	$d^1\ d^1$

qui font au nombre de 4^2.

Mais chacune des manieres d'amener le 1er. hazard trois fois peut être combinée avec chacune des manieres d'amener le 2e hazard deux fois, de $\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}$ manieres; car le terme *b a c*, entr'autres, peut sans interruption d'ordre, être combiné avec le terme $b^1\ d^1$ des $\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}$ manieres suivantes

$b^1 d^1 bac$	$b^1 b d^1 ac$	$b^1 bad^1 c$	$b^1 bacd^1$
	$b b^1 d^1 ac$	$bb^1 ad^1 c$	$bb^1 acd^1$
		$bab^1 d^1 c$	$bab^1 cd^1$
			$bacb^1 d^1$

Il en est de même de la combinaison de chacun des termes de la 1re. table avec chacun des termes de la 2e : d'où l'on voit que le nombre des manieres d'avoir le 1er. hazard trois fois & le 2e hazard deux fois en cinq épreuves, est $\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot 3^3\cdot 4^2$.

C X.

*Coroll. I*er. Si d'un même acte ou état de choses donné dépendent trois hazards différents : que $\left\{\begin{matrix} n \\ p \\ q \end{matrix}\right.$ soit le nombre des chances qui donnent en une seule épreuve le $\left\{\begin{matrix} 1^{er}. \\ 2^{e}. \\ 3^{e}. \end{matrix}\right.$ hazard, sans qu'il y ait aucune de toutes ces chances qui donnent plusieurs des hazards à la fois : je dis que le nombre des manieres également possibles dont en $\overline{M+P+Q}$ épreuves le 1er hazard peut arriver M fois juste, le 2e P fois, le 3e Q fois, est $\frac{\overline{M+P+Q}\ldots\ldots\ldots\overline{M+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots\overline{P+Q}}$, $\frac{\overline{P+Q}\ldots\ldots\overline{P+1}}{1.2\ldots\ldots Q}$, $n^M . p^P . q^Q$; car, comme on vient de le voir, le nombre de manieres dont le 2e hazard peut arriver P fois & le 3e Q fois en $\overline{P+Q}$ épreuves est $\frac{\overline{P+Q}\ldots\ldots\overline{P+1}}{1.2\ldots\ldots Q}$. $p^P . q^Q$; le nombre des manieres dont le 1er hazard peut toujours arriver en M épreuves est n^M; & chacune des n^M manieres d'avoir M fois le 1er hazard en M épreuves, peut se combiner sans interruption d'ordre, avec chacune des manieres d'amener le 2e hazard P fois & le 3e Q fois en $\overline{P+Q}$ épreuves, de $\frac{\overline{M+P+Q}\ldots\ldots\overline{M+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{P+Q}}$ manieres; donc, &c.

Il est facile, en suivant le même raisonnement, de faire voir que s'il y a 4 hazards dont les probabilités soient entr'elles comme n, p, q & r; le nombre de manieres également possibles d'avoir en $\overline{M+P+Q+R}$ épreuves le 1er. hazard M fois, le 2e. P fois, le 3e. Q fois, le 4e. R fois, est

$$\frac{\overline{M+P+Q+R} \ldots\ldots \overline{M+1}}{1.2 \ldots\ldots \overline{P+Q+R}} \cdot \frac{\overline{P+Q+R} \ldots\ldots \overline{P+1}}{1.2 \ldots \overline{Q+R}} \cdot$$

$$\frac{\overline{Q+R} \ldots\ldots \overline{Q+1}}{1.2 \ldots\ldots R} \cdot n^M . p^P . q^Q\, r^R,$$

ainsi de suite : d'où l'on conclura qu'en général, s'il y a un certain nombre de hazards dépendants d'un même acte ou état de choses donné dont les probabilités soient entr'elles comme $n, p, q, r, s \ldots$; le nombre de manieres également possibles d'avoir en $\overline{M+P+Q+R+S} \ldots\ldots$ épreuves M fois le 1[er]. hazard, P fois le 2[e]. Q fois le 3[e]. R fois le 4[e]. S fois 5[e]. &c. est

$$\frac{\overline{M+P+Q+R+S+} \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \overline{M+1}}{1.2 \ldots\ldots\ldots \overline{P+Q+R+S+} \ldots\ldots} \cdot$$

$$\frac{\overline{P+Q+R+S+} \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \overline{P+1}}{1.2 \ldots\ldots\ldots \overline{Q+R+S+} \ldots\ldots\ldots} \cdot$$

$$\frac{\overline{Q+R+S+} \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \overline{Q+1}}{1.2 \ldots\ldots\ldots \overline{R+S+} \ldots\ldots\ldots} \cdot$$

$$\frac{\overline{R+S+} \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \overline{R+1}}{1.2 \ldots\ldots\ldots \overline{S+} \ldots\ldots\ldots} \times \ldots\ldots \times$$

$$n^M . p^P . q^Q . r^R . s^S \times \ldots\ldots\ldots$$

CXI.

COROLL. II. Si plusieurs hazards dépendent d'un même acte mouvement ou état de choses donné; que $\begin{cases} n \\ p \\ q \\ \ldots \end{cases}$ soit le nombre des chances qui donnent en une seule épreuve le $\begin{cases} 1^{er}. \\ 2^{e}. \\ 3^{e}. \\ \ldots \end{cases}$ de ces hazards, & qu'aucune chance ne donne plusieurs de ces hazards

à la fois; que m soit le nombre des chances dépendantes de l'acte, mouvement ou état de choses donné; la probabilité d'avoir dans $\overline{M+P+Q+\ldots\ldots}$ épreuves, M fois le 1er. hazard, P fois le 2e. Q fois le 3e. &c. est

$$\frac{\overline{M+P+Q+\ldots}\times\ldots\times\overline{M+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{P+Q+\ldots\ldots}}\cdot\frac{\overline{P+Q+\ldots}\times\ldots\times\overline{P+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{Q+\ldots\ldots}}$$

$$\times\ldots\ldots\times n^M.p^P.q^Q\times\ldots\ldots\times\frac{1}{m^{\overline{M+P+Q+\ldots\ldots}}}$$

Si le nombre total des épreuves est N nombre plus grand que $\overline{M+P+Q+\ldots\ldots}$; cette probabilité sera

$$\frac{N\ldots\overline{M+P+Q+\ldots+1}}{1.2\ldots\overline{N-M-P-Q-\ldots}}\cdot\overline{m-n-p-q-\ldots}^{\,\overline{N-M-P-Q-\ldots}}\times$$

$$\frac{\overline{M+P+Q+\ldots}\times\ldots\times\overline{M+1}}{1.2\ldots\overline{P+Q+\ldots}}\cdot\frac{\overline{P+Q+\ldots}\times\ldots\times\overline{P+1}}{1.2\ldots\overline{Q+\ldots}}\times\ldots\times$$

$$n^M.p^P.q^Q.\times\ldots\ldots\times\frac{1}{m^N}.$$

car les $\overline{m-n-p-q-\ldots\ldots\ldots}$ chances qui ne donnent aucun des hazards spécifiés, peuvent arriver dans les $\overline{N-M-P-Q-\ldots\ldots}$ épreuves, où l'on ne demande aucun de ces hazards de

$\overline{m-n-p-q-\ldots\ldots}^{\,\overline{N-M-P-Q-\ldots\ldots\ldots}}$ manieres également possibles (C.): & chacune de ces manieres peut, sans aucune interversion d'ordre, être combinée avec chacune des

$$\frac{\overline{M+P+Q+\ldots}\times\ldots\times\overline{M+1}}{1.2\ldots\overline{P+Q+\ldots\ldots}}\cdot\frac{\overline{P+Q+\ldots}\times\ldots\times\overline{P+1}}{1.2\ldots\overline{Q+\ldots\ldots}}\times$$

$\ldots\times n^M.p^P.q^Q.\times\ldots$ manieres d'avoir le résultat demandé, de $\frac{N\ldots\overline{M+P+Q+\ldots+1}}{1.2\ldots\overline{N-M-P-Q-\ldots\ldots}}$ manieres.

CXII.

EXEMPLES. Je jette 20 fois de ſuite ſur une table un dé à jouer ordinaire : pour avoir la probabilité d'amener dans les 20 jets, $\left\{\begin{matrix}3\\5\\2\\4\\5\\1\end{matrix}\right\}$ fois le point $\left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix}\right\}$; dans l'expreſſion générale ci-deſſus je fais $N=20$, $M=3$, $P=5$, $Q=2$, $R=4$, $S=5$, $T=1$; $m=6$; $n=p=q=r=s=t=1$; & elle devient

$$\frac{20\ldots\ldots4}{1.2\ldots.17}\cdot\frac{17\ldots\ldots6}{1.2\ldots.12}\cdot\frac{12\ldots\ldots3}{1.2\ldots.10}\cdot\frac{10\ldots\ldots5}{1.2\ldots\ldots6}\cdot\frac{6}{1}\cdot\frac{1}{6^{20}}$$

$$=\frac{18.19.20}{1.2.3}\cdot\frac{13.14.15.16.17}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{11.12}{1.2}\cdot\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{6^{19}}$$

$=\frac{56581525}{352638738432}$, qui eſt la probabilité cherchée.

Je jette 8 fois de ſuite ſur une table 2 dés à jouer ordinaires : pour avoir la probabilité d'amener $\left\{\begin{matrix}2\\2\\1\\1\end{matrix}\right\}$ fois le point $\left\{\begin{matrix}5\ \&\ 4\\3\ \&\ 2\\\text{ſonnet}\\\text{quine}\end{matrix}\right\}$; dans l'expreſſion générale je fais
$N=8$, $M=2$, $P=2$, $Q=1$, $R=1$; $m=36$; $n=2$, $p=2$, $q=1$, $r=1$; & elle devient

$$\frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\cdot\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{2}{1}\cdot2^2.\,2^2.\,30^2.\,\frac{1}{36^8}=$$

$\frac{875}{34012224}$, qui eſt la probabilité cherchée.

CXIII.

THÉORÊME. IV. La probabilité d'un hazard dans le cas d'une ſeule épreuve étant $\frac{n}{m}$; la probabilité que ce hazard arrivera le nombre de fois M

juste dans un nombre N d'épreuves, est

$$\frac{N.\overline{N-1}\ldots\ldots\overline{N-M+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots M} \cdot \frac{n^M}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{\,\overline{N-M}}.$$

Dem. 1°. Dans la formule générale $\frac{\overline{M+P}\ldots\overline{M+1}}{1.2\ldots\ldots P} \cdot$ $n^M . p^P$ trouvée par le Théorême précédent, si je substitue $\overline{m-n}$ à p & $\overline{N-M}$ à P; j'aurai

$$\frac{N.\overline{N-1}\ldots\ldots\overline{M+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots\overline{N-M}} \cdot n^M \cdot \overline{m-n}^{\,\overline{N-M}} \text{ ou}$$

$$\frac{N.\overline{N-1}\ldots\ldots\overline{N-M+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots M} \cdot n^M \cdot \overline{m-n}^{\,\overline{N-M}}$$

(XXXII, XXXIV.) pour le numérateur de la probabilité dont il s'agit.

2°. Le dénominateur de la probabilité cherchée est m^N (C.); donc cette probabilité est

$$\frac{N.\overline{N-1}\ldots\ldots\overline{N-M+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots M} \cdot \frac{n^M}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{\,\overline{N-M}} \text{ : C. Q. F. D.}$$

CXIV.

Exemple. Si l'on demande quelle est la probabilité d'amener deux fois seulement le point 5 & 4 en quatre jets de deux dés à jouer ordinaires : dans l'expression générale ci-dessus je fais $N = 4$, $M = 2$, $m = 36$, $n = 2$, & elle devient $\frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{2^2}{36^4} \cdot 34^2 = \frac{289}{17496}$. qui est la probabilité cherchée.

CXV.

Théorême V. Représentant par $\frac{n}{m}$ la probabilité d'un hazard dans le cas d'une seule épreuve : la probabilité que ce hazard arrivera le nombre de fois $\overline{M-1}$ au plus, en un nombre N d'épreuves, est

$$\left\{1-\frac{n}{m}\right\}^{N}\cdot\left\{1+N\cdot\frac{n}{m-n}+\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{2}\right.$$

$$+\frac{N.\overline{N-1}.\overline{N-2}}{1.2.3}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{3}+\ldots\ldots\ldots+$$

$$\left.\frac{N.\overline{N-1}\ldots\ldots\overline{N-M+2}}{1.2\ldots\ldots\ldots\overline{M-1}}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\overline{M-1}}\right\}$$

Dem. J'aurai la probabilité dont il s'agit en substituant dans la formule trouvée au Théorême précédent, à la quantité M tous les nombres entiers depuis o jusqu'à $\overline{M-1}$ inclusivement, & prenant la somme de tous les produits, qui sera

$$\left\{1-\frac{n}{m}\right\}^{N}\cdot\left\{1+N\cdot\frac{n}{m-n}+\ldots+\frac{N\ldots\overline{N-M+2}}{1.2\ldots\overline{M-1}}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\overline{M-1}}\right\}$$

C. Q. F. D.

CXVI.

Exemple. Si je prends 3 des numéros de la lotterie royale de France: pour avoir la probabilité que ces 3 numéros arriveront une fois au plus dans l'un des 4 tirages prochains; dans l'expression générale ci-dessus je substitue 1 à n; 11748 à m; (LI.) 4 à N; 2 à M; & elle devient

$$\left(\frac{11747}{11748}\right)^{4}\cdot\left\{1+4\cdot\frac{1}{11747}\right\}=\frac{\overline{11747}^{3}}{\overline{11748}^{4}}\cdot 11751$$

$$=\frac{6249426172124991}{6349426448124672}.$$

CXVII.

Théorême VI. Représentant toujours par $\frac{n}{m}$ la probabilité d'un hazard dans le cas d'une seule épreuve: la probabilité que ce hazard arrivera le nombre de fois M au moins en un nombre N d'épreuves, est

1 —

$$1-\left\{1-\frac{n}{m}\right\}^N \cdot \left\{1+N\frac{n}{m-n}+\ldots+\frac{N\ldots\overline{N-M+2}}{1.2\ldots\overline{M-1}}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\overline{M-1}}\right\}.$$

Démonst. Pour avoir la probabilité dont il s'agit, il faut retrancher de l'unité la formule générale du Théorême précédent ; donc, &c. *C. Q. F. D.*

CXVIII.

Coroll. Si $M = 1$, l'expression générale qui vient d'être trouvée se réduit à $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N$, laquelle a deja été démontrée au Théorême 2e. & si $M = N$, cette même formule devient

$$1 - \left\{1-\frac{n}{m}\right\}^N \cdot \left\{\left(1+\frac{n}{m-n}\right)^N - \left(\frac{n}{m-n}\right)^N\right\}$$

(Formule de Newton pour les puissances)

$$= 1 - \frac{\overline{m-n}^N}{m^N} \cdot \frac{m^N - n^N}{\overline{m-n}^N} = 1 - \frac{m^N - n^N}{m^N} = \left(\frac{n}{m}\right)^N;$$

proposition déja démontrée ci-dessus (XXVI & CI.).

CXIX.

Remarque Ire. Si dans la formule générale du Théorême 4e. on eut substitué successivement à M tous les nombres entiers depuis M jusqu'à N inclusivement, & qu'on eut pris la somme de tous les produits résultants de ces substitutions : on auroit eu

$$\left(\frac{n}{m}\right)^N \cdot \left\{1+N.\frac{n}{m-n}+\ldots\ldots+\frac{N.\ldots\ldots\overline{N-M+1}}{1.2.\ldots\ldots M} \cdot \left(\frac{n}{m-n}\right)^{\overline{N-M}}\right\},$$

expression qui équivaut à celle du Théorême 6e. quoique sous une forme différente : & si on retranche de l'unité cette derniere expression ; on aura

$$1-\left\{\frac{n}{m}\right\}^N \cdot \left\{1+N\frac{n}{m-n}+\ldots\ldots+\frac{N\ldots\overline{N-M+1}}{1.2\ldots\ldots M}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{N-M}\right\}$$

expression équivalente à celle qui a été démontrée au Théorême 5e.

C X X.

REMARQUE II. Connoissant la probabilité $\frac{n}{m}$ d'un hazard dans le cas d'une seule épreuve, & la probabilité P que ce même hazard arrivera un nombre connu $\left\{\begin{matrix} M \text{ juste} \\ \overline{M-1} \text{ au plus} \\ M \text{ au moins} \end{matrix}\right\}$ de fois dans un nombre inconnu N d'épreuves : pour connoître le nombre N d'épreuves au moyen desquelles ce hazard acquiert la probabilité P d'arriver $\left\{\begin{matrix} M \text{ fois juste} \\ \overline{M-1} \text{ fois au plus} \\ M \text{ fois au moins} \end{matrix}\right\}$: dans l'expression générale démontrée au Théorême $\left\{\begin{matrix} 4^e \\ 5^e \\ 6^e \end{matrix}\right.$; je substituerai successivement à N, les nombres M, $M+1$, $M+2$, $M+3$, ainsi de suite, jusqu'à ce que cette expression devienne égale à la fraction donnée P, ou la plus approchante qu'il sera possible de la valeur de cette fraction. Par exemple : Si l'on demande en combien de jets de deux dés à jouer ordinaires, on peut parier équitablement, ou le plus équitablement qu'il sera possible, à mises égales, d'amener le point 7 au moins deux fois : dans l'expression générale

$$1 - \left\{1 - \frac{n}{m}\right\}^N \cdot \left\{1 + N\frac{n}{m-n} + \ldots\ldots + \frac{N \ldots \overline{N-M+2}}{1.2 \ldots\ldots \overline{M-1}} \cdot \left(\frac{n}{m-n}\right)^{\overline{M-1}}\right\}$$

je substitue 2 à M, $\frac{1}{6}$ à $\frac{n}{m}$; elle devient $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N \cdot \left(1 + \frac{N}{5}\right)$ que j'égale à $\frac{1}{2}$.

Dans cette derniere formule je substitue succes-

sivement à N les nombres entiers 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, &c. & cette derniere formule devient par ces substitutions

Si $N = 2$, $\frac{1}{36}$; Si $N = 3$, $\frac{2}{27}$;

Si $N = 4$, $\frac{19}{144}$; Si $N = 5$, $\frac{763}{3888}$;

Si $N = 6$, $\frac{12281}{46656}$; Si $N = 7$, $\frac{7703}{23328}$;

Si $N = 8$, $\frac{663991}{1579616}$; Si $N = 9$, $\frac{2304473}{5038848}$;

Si $N = 10$, $\frac{10389767}{20155392}$. D'où l'on voit qu'il y a quelque désavantage de parier à mises égales que le point 7 arrivera au moins 2 fois en 9 coups, & quelque avantagede parier la même chose en 10 coups, & que le pari ne peut jamais être parfaitement équitable.

CXXI.

Si $\left\{\begin{matrix} \frac{n}{m} \\ M \end{matrix}\right.$, P & N sont connus & $\left\{\begin{matrix} M \\ \frac{n}{m} \end{matrix}\right.$ inconnue : on pourra trouver, par des substitutions successives semblables, la valeur de l'inconnue : d'où l'on voit que de ces 4 quantités, savoir 1°. la probabilité qu'un hazard arrivera en une seule épreuve, 2°. la probabilité que ce hazard arrivera un certain nombre de fois juste ou au moins ou au plus en un certain nombre d'épreuves, 3°. le nombre de fois que le hazard doit probablement arriver, 4°. le nombre des épreuves; trois étant données, on pourra toujours trouver la quatrieme.

CXXII.

Problême. Supposant 1°. que m est le nombre total des chances dépendantes d'un état de choses

donné, 2°. que $\frac{n}{m}$ & $\frac{p}{m}$ sont les probabilités en une seule épreuve de deux hazards dépendants de ce même état de choses, 3°. que φ est le nombre des chances qui donnent ces deux hazards à la fois,

4°. que $\left\{ \begin{matrix} y, n-\varphi \\ z, p-\varphi \end{matrix} \right.$ est le nombre des chances qui

donnent le $\left\{ \begin{matrix} 1^{er}. \\ 2^{e}. \end{matrix} \right.$ hazard sans donner le $\left. \begin{matrix} 2^{e}. \\ 1^{er}. \end{matrix} \right\}$,

& que u, $m-n-p+\varphi$ est le nombre des chances qui ne donnent aucun des 2 hazards : on demande quelle est la probabilité que dans un nombre N d'épreuves, le 1er. hazard arrivera M fois juste, & le 2e. P fois juste.

SOLUT. 1°. Il peut se faire qu'il n'arrive aucune des φ chances qui donnent les deux hazards à la fois; & dans ce cas, le nombre de manieres d'avoir M fois le 1er. hazard, P fois le 2e. & $N-M-P$ fois aucun des 2 hazards est (CX.)

$$\frac{N \ldots \overline{M+1}}{1.2 \ldots \overline{N-M}} \cdot \frac{\overline{N-M} \ldots \overline{P+1}}{1.2 \ldots \overline{N-M-P}} \cdot \overset{M}{y} \cdot \overset{P}{z} \cdot \overset{\overline{N-M-P}}{u} .$$

2°. Il peut se faire qu'il arrive en une épreuve une des φ chances qui donnent les 2 hazards à la fois; & dans ce cas, chacune de ces φ chances peut arriver à N épreuves différentes : d'ailleurs le nombre de manieres d'avoir $M-1$ fois le 1er. hazard,

& $P-1$ le 2e. est $\frac{\overline{N-1} \ldots M}{1.2 \ldots \overline{N-M}} \cdot \frac{\overline{N-M} \ldots P}{1.2 \ldots \overline{N-M-P+1}}$.

$\overset{\overline{M-1}}{y} \cdot \overset{\overline{P-1}}{z} \cdot \overset{\overline{N-M-P+1}}{u}$ qu'il faut multiplier par $N\varphi$.

3°. Il peut se faire qu'une ou 2 des φ chances qui donnent les 2 hazards à la fois arrivent en 2 épreuves; & dans ce cas le nombre des manieres d'avoir le résultat desiré, est

$$\frac{\overline{N-2}\ldots\ldots\ldots\overline{M-1}}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots\overline{N-M}}\cdot\frac{\overline{N-M}\ldots\ldots\ldots\ldots\overline{P-1}}{1.2\ldots\ldots\ldots\overline{N-M-P+2}}\cdot y^{\overline{M-2}}\cdot z^{\overline{P-2}}\cdot u^{\overline{N-M-P+2}}\cdot\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}\cdot\varphi^2;$$ ainsi de suite : & enfin

Il peut se faire que 1, 2, 3.... ou P des φ chances qui donnent les 2 hazards à la fois arrivent en P épreuves, que le 1er. hazard seul arrive en $M-P$ épreuves, & aucun des 2 hazards dans les N-M autres épreuves, ce qui peut arriver de

$$\frac{\overline{N-P}\ldots\overline{M-P+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{N-M}}\cdot y^{\overline{M-P}}\cdot u^{\overline{N-M}}\cdot\frac{N\ldots\overline{N-P+1}}{1.2\ldots\ldots P}\cdot\varphi^{P}$$

manieres; donc la probabilité cherchée est

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{N\ldots\overline{M+1}}{1.2\ldots\overline{N-M}}\cdot\frac{\overline{N-M}\ldots\overline{P+1}}{1.2\ldots\overline{N-M-P}}\cdot y^{M}\cdot z^{P}\cdot u^{\overline{N-M-P}}+\\ \frac{\overline{N-1}\ldots M}{1.2\ldots\overline{N-M}}\cdot\frac{\overline{N-M}\ldots\ldots P}{1.2\ldots\overline{N-M-P+1}}\cdot y^{\overline{M-1}}\cdot z^{\overline{P-1}}\cdot u^{\overline{N-M-P+1}}\cdot N\varphi+\\ \frac{\overline{N-2}\ldots\ldots\ldots\overline{M-1}}{1.2\ldots\ldots\ldots\overline{N-M}}\cdot\frac{\overline{N-M}\ldots\ldots\ldots\overline{P-1}}{1.2\ldots\overline{N-M-P+2}}\cdot y^{\overline{M-2}}\cdot z^{\overline{P-2}}\cdot u^{\overline{N-M-P+2}}\cdot\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}\cdot\varphi^{2}+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ \frac{\overline{N-P}\ldots\overline{M-P+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{N-M}}\cdot y^{\overline{M-P}}\cdot u^{\overline{N-M}}\cdot\frac{N\ldots\overline{N-P+1}}{1.2\ldots P}\cdot\varphi^{P}\end{array}\right\}:m^{N}.$$

C. Q. F. T.

CXXIII.

Exemple. Si l'on demande quelle est la probabilité d'amener, en 8 jets de 2 dés à jouer ordinaires, 4 fois juste le point 6, & 2 fois juste un doublet : je fais dans la formule générale ci-dessus $N=8$, $M=4$, $P=2$, $\varphi=1$, $m=36$, $t=5$, $l=6$,

& par conséquent $y=4$, $z=5$, $u=26$: & elle devient $\left(\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}.\frac{4.3}{1.2}.4^4.5^2.26^2+\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}.\frac{4.3.2}{1.2.3}.4^3.5^1.26^3.8.1+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.4^2.1.26^4.\frac{8.7}{1.2}.1\right):36^8=\frac{10925005}{2754990144}$.

CXXIV.

Remarques. 1°. Si dans la formule générale ci-dessus on substitue successivement à M tous les nombres entiers depuis $\left\{\begin{matrix}0\\M\end{matrix}\right.$ jusqu'à $\left.\begin{matrix}M\\N-P\end{matrix}\right\}$ inclusivement, & qu'on prenne la somme de tous les produits résultants de ces substitutions ; on aura une nouvelle formule $\left\{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right.$ qui sera la probabilité d'avoir P fois juste le 2e. hazard, & M fois $\left\{\begin{matrix}\text{au plus}\\\text{au moins}\end{matrix}\right.$ le 1er. hazard.

2°. Si dans la formule générale ci-dessus on substitue successivement à P tous les nombres entiers depuis $\left\{\begin{matrix}0\\P\end{matrix}\right.$ jusqu'à $\left.\begin{matrix}P\\N-M\end{matrix}\right\}$ inclusivement, & qu'on prenne la somme de tous les produits résultants de ces substitutions; on aura une formule $\left\{\begin{matrix}C\\D\end{matrix}\right.$ qui sera la probabilité d'avoir M fois juste le 1er. hazard, & P fois $\left\{\begin{matrix}\text{au plus}\\\text{au moins}\end{matrix}\right.$ le 2e. hazard.

3°. Si dans la formule générale A on substitue successivement à P tous les nombres entiers depuis $\left\{\begin{matrix}0\\P\end{matrix}\right.$ jusqu'à $\left.\begin{matrix}P\\N-M\end{matrix}\right\}$ inclusivement, & qu'on prenne la somme de tous les produits résultants de ces

ſubſtitutions ; on aura une nouvelle formule $\left\{ \begin{matrix} E \\ F \end{matrix} \right.$ qui ſera la probabilité d'avoir M fois au plus le 1er. hazard, & P fois $\left\{ \begin{matrix} \text{au plus} \\ \text{au moins} \end{matrix} \right.$ le 2e. hazard.

4°. Si dans la formule générale B on ſubſtitue ſucceſſivement à P tous les nombres entiers depuis $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ P \end{matrix} \right.$ juſqu'à $\left. \begin{matrix} P \\ N-M \end{matrix} \right\}$ incluſivement, & qu'on prenne la ſomme des produits réſultants de ces ſubſtitutions ; on aura une nouvelle formule $\left\{ \begin{matrix} G \\ H \end{matrix} \right.$ qui ſera la probabilité d'avoir M fois au moins le 1er. hazard, & P fois $\left\{ \begin{matrix} \text{au plus} \\ \text{au moins} \end{matrix} \right.$ le 2e. hazard.

5°. Si dans les formules C & D on ſubſtitue ſucceſſivement à M tous les nombres entiers depuis $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ M \end{matrix} \right.$ juſqu'à $\left. \begin{matrix} M \\ N-P \end{matrix} \right\}$ incluſivement, & qu'on prenne la ſomme de tous les produits réſultants de ces ſubſtitutions ; on aura quatre nouvelles formules générales équivalentes aux formules E, F, G & H.

CXXV.

Si dans la formule générale H on fait $M = 1$ & $P = 1$, elle ſe réduira à

$$\frac{m^N - \overline{m-n}^N - \overline{m-p}^N + \overline{m-n-p+q}^N}{m^N};$$

qui eſt la probabilité d'amener les 2 hazards au moins une fois chacun en un nombre N d'épreuves.

CXXVI.

Exemple. Si on demande quelle eſt la probabilité d'amener au moins une fois le point 6 &

doublet en 4 jets de 2 dés à jouer ordinaires : dans la formule ci-dessus je fais $m=36$, $n=5$, $p=6$, $\varphi=1$, $\overline{m-n}=31$, $\overline{m-p}=30$, $\overline{m-n-p+\varphi}=26$, $N=4$, & elle devient $\frac{36^4-31^4-30^4+26^4}{36^4}=\frac{403071}{1679616}=\frac{134357}{559872}$.

CXXVII.

Si l'on desire savoir en combien de jets de 2 dés à jouer ordinaires, on peut parier le plus équitablement qu'il est possible à mises égales d'amener le point 6 & un doublet : dans l'expression $\frac{36^N-31^N-30^N+26^N}{36^N}$ je substitue successivement à N tous les nombres entiers 2, 3, 4, 5, &c. jusqu'à ce que cette quantité devienne la plus approchante qu'il est possible de la valeur $\frac{1}{2}$, & le nombre, qui étant substitué à N remplira cette condition, sera le nombre cherché. Or je trouve, en faisant ce calcul, que si $N=8$, l'expression devient $\frac{1333128798591}{2821109907456}$ qui est un peu moindre que $\frac{1}{2}$: & que si $N=9$, la même expression devient $\frac{55983592650721}{101559956668416}$ qui est un peu plus grande que $\frac{1}{2}$: d'où l'on voit qu'il y a quelque désavantage de parier à mises égales que le point 6 & un doublet arriveront en 8 jets ; & qu'il y a quelque avantage de parier aux mêmes conditions que ces deux hazards arriveront au moins une fois chacun en neuf coups de dés.

CXXVIII.

Si l'on a 3 hazards dont les probabilités soient $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, $\frac{q}{m}$, dépendants du même acte, mouve-

ment ou état de choses donné; que x, y, z soient le nombre des chances qui donnent le 1er, le 2e, le 3e. hazard seul; que φ, φ', φ'', φ''' soient le nombre des chances qui donnent le 1er. & le 2e. hazard à la fois, le 1er. & le 3e. hazard à la fois, le 2e. & le 3e. hazard à la fois, les 3 hazards à la fois, & qu'on desire avoir la probabilité que dans N épreuves, le 1er. hazard arrivera M fois juste, le 2e. hazard P fois juste, le 3e. hazard Q fois juste: on trouvera cette probabilité en raisonnant comme on a fait dans le problême précédent d'après le §. CX.: mais on aura une expression beaucoup plus composée, qui sera, non pas une suite simple, ni même une suite de suites, mais une suite de termes dont chacun sera une suite de laquelle chaque terme sera une suite de suites.

En effet: on aura d'abord, comme dans le problême précédent, une suite de termes dont chacun sera l'expression

$$\frac{N\ldots\ldots\overline{M+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{N-M}} \cdot \frac{\overline{N-M}\ldots\overline{P+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{N-M-P}} \cdot \frac{\overline{N-M-P}\ldots\overline{Q+1}}{1.2\ldots\overline{N-M-P-Q}} \cdot x^{M} . y^{P} . z^{Q} . u^{\overline{N-M-P-Q}}$$

régulièrement modifiée; lesquels termes seront multipliés, le 1er. par 1, le 2e. par $N\varphi$, le 3e. par $\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}\varphi^2$, le 4e. par $\frac{N.\overline{N-1}.\overline{N-2}}{1.2.3}\varphi^3$, ainsi de suite, & enfin le dernier par $\frac{N\ldots\ldots\overline{N-P+1}}{1.2\ldots\ldots P} \cdot \varphi^{P}$.

Mais cette derniere suite ne sera elle-même que le 1er. terme d'une autre suite dans laquelle les termes, dont chacun sera cette derniere suite régulièrement modifiée, seront successivement multipliés par 1, $N\varphi'$, $\frac{N.\overline{N-1}}{1.2} \cdot \varphi'^2$, ... $\frac{N\ldots\overline{N-Q+1}}{1.2\ldots\ldots Q} \cdot \varphi'^{Q}$.

De-là, cette derniere ſuite ne ſera elle-même que le 1er. terme d'une autre ſuite dans laquelle les termes, dont chacun ſera cette derniere ſuite régulièrement modifiée, feront multipliés ſucceſſivement par 1, $N\varphi''$, $\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}.\varphi''^2$, ... $\frac{N.....\overline{N-Q+1}}{1.2.........Q}\varphi''Q$.

De-là enfin, cette derniere ſuite ne ſera elle-même que le 1er. terme d'une autre ſuite dans laquelle les termes, dont chacun ſera cette derniere ſuite régulièrement modifiée, feront multipliés ſucceſſivement par 1, $N\varphi'''$, ... $\frac{N.....\overline{N-Q+1}}{1.2..........Q}.\varphi'''Q$. Cette ſuite ainſi formée ſera le numérateur de la probabilité dont il s'agit, de laquelle m^N eſt le dénominateur.

On pourra d'ailleurs, au moyen de cette derniere probabilité, trouver les probabilités que le 1er. hazard arrivant *M* fois juſte, ou au plus ou au moins, & le 2e. *P* fois juſte, au plus ou au moins, le 3e. hazard arrivera *Q* fois juſte, ou au plus ou au moins; ſuivant la méthode indiquée au §. CXXIV.

CXXIX.

On pourroit étendre plus loin ces recherches, & trouver les probabilités d'avoir en *N* épreuves, juſte, ou au moins ou au plus, *M* fois un hazard dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$, *P* fois un hazard dont la probabilité eſt $\frac{p}{m}$; *Q* fois un hazard dont la probabilité eſt $\frac{q}{m}$, *R* fois un hazard dont la probabilité eſt $\frac{r}{m}$, *S* fois un hazard dont la probabilité eſt $\frac{s}{m}$, &c. mais ces calculs meneroient fort

loin ; il suffit d'en avoir indiqué la voie au lecteur, & de l'avoir mis à portée de les faire au besoin ; sans le fatiguer inutilement ici par des spéculations arides & trop compliquées.

CXXX.

Si l'on assigne à chacun des hazards désignés le rang de l'épreuve à laquelle on desire qu'il arrive : la probabilité que les hazards désignés arriveront chacun à l'épreuve qui lui a été assignée est composée des probabilités des hazards désignés (XXIV. XXV. XXVI.). Si l'on demande, par exemple, que le hazard dont la probabilité est $\frac{n}{m}$ arrive à la 1re. épreuve, celui dont la probabilité est $\frac{p}{m}$ à la 2e. épreuve, celui dont la probabilité est $\frac{q}{m}$ à la 3e. épreuve : la probabilité de l'effet demandé est $\frac{npq}{m^3}$.

Si l'on demande que 2 seulement des trois hazards désignés arrivent aux épreuves qui leur ont été assignées : la probabilité de l'effet demandé est $\frac{np\cdot\overline{m-q}+nq\cdot\overline{m-p}+pq\cdot\overline{m-n}}{m^3}$.

Si l'on demande qu'un seul des trois hazards désignés arrive à l'épreuve qui lui a été assignée ; la probabilité de l'effet demandé est $\frac{n\cdot\overline{m-p}\cdot\overline{m-q}+p\cdot\overline{m-n}\cdot\overline{m-q}+q\cdot\overline{m-n}\cdot\overline{m-p}}{m^3}$.

Si l'on demande qu'aucun des 3 hazards désignés n'arrive à l'épreuve qui lui a été assignée : la probabilité de l'effet demandé est $\frac{\overline{m-n}\cdot\overline{m-p}\cdot\overline{m-q}}{m^3}$.

Si l'on demande que 2 au moins des 3 hazards désignés arrivent aux épreuves qui leur ont été assignées ; la probabilité de l'effet demandé est

$$\frac{npq + np.\overline{m-q} + nq.\overline{m-p} + pq.\overline{m-n}}{m^3}$$ ou

$$\frac{mnp + q.(n.\overline{m-p} + p.\overline{m-n})}{m^3}.$$

Si l'on demande qu'un au plus des 3 hazards désignés arrive à l'épreuve qui lui a été assignée : la probabilité de l'effet demandé est

$$\frac{m.\overline{m-p}.\overline{m-q} + \overline{m-n}.(p.\overline{m-q} + q.\overline{m-p})}{m^3}.$$

Si l'on demande que dans N épreuves, deux au moins des trois hazards désignés arrivent aux épreuves qui leur ont été assignées, & qu'un 4e. hazard dont la probabilité est $\frac{r}{m}$ arrive au moins une fois dans les $N-3$ autres épreuves : la probabilité de l'effet demandé sera

$$\frac{mnp + q(n.\overline{m-p} + p.\overline{m-n})}{m^3}.\left\{1-\left(1-\frac{r}{m}\right)^{N-3}\right\};$$

ainsi des autres.

§ CXXXI.

Si au lieu de réitérer, un nombre N de fois consécutives, l'acte ou mouvement duquel dépendent les hazards ; on avoit ou si on produisoit en même temps un nombre N d'actes ou mouvements semblables, la probabilité seroit la même, comme il est évident : ainsi, étant donné un hazard dont la probabilité est $\frac{n}{m}$, si on a ou si on produit en même temps un nombre N d'actes ou mouvements pareils à celui dont ce hazard dépend ; la probabilité d'avoir ce hazard M fois juste, est

$$\frac{N\ldots\ldots\overline{N-M+1}}{1.2\ldots\ldots M}.\frac{n^M}{m^N}.\overline{m-n}^{\,N-M}$$ (CXIII.);

M fois au moins, est

$$1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^N \cdot \left\{1+N.\frac{n}{m-n}+\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^2+\ldots\ldots + \frac{N.\overline{N-1}\ldots\ldots\overline{N-M+2}}{1.2\ldots\ldots\overline{M-1}}\cdot\left(\frac{n}{m-1}\right)^{\overline{M-1}}\right\}\text{(CXVII.)};$$

M fois au plus, eſt

$$\left(1-\frac{n}{m}\right)^N \cdot \left\{1+N.\frac{n}{m-n}+\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^2+\ldots + \frac{N.\overline{N-1}\ldots\ldots\overline{N-M+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots M}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^M\right\}\text{(CXV.)};$$

Une fois au moins, eſt $1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^N$;

Une fois au plus, eſt $\left(1-\frac{n}{m}\right)^N \cdot \left(1+N\frac{n}{m-n}\right)$;

Une fois juſte, eſt $\frac{N}{1}\cdot\frac{\overline{m-n}^{\,\overline{N-1}}\cdot n}{m^N}$;

Étant donné 2 hazards dont les probabilités ſont $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, & le nombre des chances qui donnent les 2 hazards à la fois φ; ſi l'on a ou ſi l'on produit en même temps un nombre N d'actes ou de mouvements pareils à celui dont ces 2 hazards dépendent:

La probabilité d'avoir ces deux hazards

le 1er. M fois juſte, & le 2e. P fois juſte, eſt l'expreſſion générale trouvée au §. CXXII.

Les probabilités d'avoir ces 2 hazards

le 1er. M fois (au plus / au moins) & le 2e. P fois juſte, ſeront les formules A & B (CXXIV.):

le 2e. P fois (au plus / au moins) & le 1er. M fois juſte, ſeront les formules C & D (ibid.);

le 1er. M fois au plus & le 2e. P fois$\left(\begin{matrix}\text{au plus}\\ \text{au moins}\end{matrix}\right)$, feront les formules E & F:

le 1er. M fois au moins & le 2e. P fois$\left(\begin{matrix}\text{au plus}\\ \text{au moins}\end{matrix}\right)$, feront les formules G & H:

au moins une fois chacun, fera la formule $\frac{m^N - \overline{m-n}^N - \overline{m-p}^N + \overline{m-n-p+\varphi}^N}{m^N}$ (CXXV.).

Étant donnés autant de hazards qu'on voudra dont les probabilités font $\frac{n}{m}, \frac{p}{m}, \frac{q}{m}, \frac{r}{m}$ ....., & o le nombre des chances qui donnent plusieurs de ces hazards à la fois : si l'on produit en même temps un nombre N d'actes ou mouvements pareils à celui dont tous ces hazards dépendent : la probabilité d'avoir M fois juste le 1er. hazard, P fois le 2e, Q fois le 3e, R fois le 4e,.... sera la formule générale trouvée au §. CXI : ainsi, si je jette à la fois sur une table 20 dés à jouer ordinaires; la probabilité d'amener 3 as, 5 deux, 2 trois, 4 quatre, 5 cinq & 1 six, est $\frac{56581525}{3526387384 32}$; (CXII.).

Si huit personnes jettent en même temps sur une table, chacune 2 dés à jouer ordinaires, la probabilité que deux de ces personnes seulement ameneront le point 5 & 4, que deux seulement ameneront 3 & 2, qu'une seule amenera sonnet, & qu'une seule amenera Quine, est $\frac{875}{34012224}$. (Ibid.).



CHAPITRE V.

De l'Évaluation des Probabilités par l'Analyse des Questions proposées.

§. CXXXII.

La variété infinie des questions qui peuvent être proposées sur les probabilités, ne permet pas d'assigner une regle universelle au moyen de laquelle on puisse évaluer exactement toutes les probabilités qu'on desireroit de connoître : nous avons néanmoins établi dans les chapitres précédents des principes de la plus grande généralité, au moyen desquels on résoudra facilement une infinité de questions de cette espece, & spécialement la plupart de celles qui ont rapport aux jeux de hazard usités : nous avons eu soin aussi d'éclaircir ces principes par des exemples qui en montrent l'application : l'objet de ce chapitre est de familiariser de plus en plus le lecteur avec l'usage de ces principes, & de montrer, par la solution de quelques questions particulieres, comment on peut évaluer exactement les probabilités au moyen de l'analyse & de la Géométrie, lorsque ces questions en sont susceptibles.

CXXXIII.

Question 1re. Je joue au Wisk, & je donne: on demande quelle est la probabilité que mon jeu sera composé des 13 cartes de la couleur de la tourne ; ou ce qui est de même, que j'aurai à moi seul tous les atouts.

Solut. 1°. Pour avoir le numérateur de la probabilité cherchée : j'obſerve qu'en ſuppoſant que j'ai en main les 13 atouts, les 39 autres cartes peuvent être partagées entre les trois autres joueurs de $\frac{39 \ldots\ldots 27}{1.2 \ldots\ldots 13} \cdot \frac{26 \ldots\ldots 14}{1.2 \ldots\ldots 13}$ manieres (XLV.) : donc ce nombre eſt le numérateur cherché.

2°. Pour avoir le dénominateur : j'obſerve que le nombre de manieres dont les 52 cartes du jeu peuvent être partagées en 4 parts égales aux quatre joueurs, eſt $\frac{52 \ldots\ldots 40}{1.2 \ldots\ldots 13} \cdot \frac{39 \ldots\ldots 27}{1.2 \ldots\ldots 13} \cdot \frac{26 \ldots\ldots 14}{1.2 \ldots\ldots 13}$; qui eſt le dénominateur dont s'agit ; donc la probabilité cherchée eſt $\frac{1.2 \ldots\ldots 13}{52 \ldots\ldots 40} = \frac{1}{635013559600}$.

CXXXIV.

Question 2e. Je vais jouer au piquet contre Pierre : on demande quelle eſt la probabilité que j'aurai d'emblée les 4 tierces majors ſans écarter ni reprendre.

Solut. Pour avoir le numérateur de la probabilité cherchée ; j'obſerve qu'en ſuppoſant que les 4 tierces majors m'arrivent en effet, les 20 cartes reſtantes peuvent être partagées entre Pierre & le talon, c'eſt-à-dire, en 2 parts, l'une de 12, l'autre de 8 cartes, de $\frac{20 \ldots\ldots 13}{1.2 \ldots\ldots 8}$ manieres : donc ce nombre eſt le numérateur cherché. Le dénominateur eſt le nombre de manieres dont 32 cartes peuvent être diſtribuées en 3 parts, deux de 12 & une de 8 cartes ; c. à d. $\frac{32 \ldots\ldots 21}{1.2 \ldots\ldots 12} \cdot \frac{20 \ldots\ldots 13}{1.2 \ldots\ldots 8}$ (XLIII.) ; donc la probabilité cherchée eſt $\frac{1.2 \ldots\ldots 12}{32 \ldots\ldots 21} = \frac{1}{225792840}$.

CXXXV.

Question 3e. Je donne les 4 tierces majors à Pierre contre qui je joue au piquet ; & pour faire mon

mon jeu, je prends au hazard 12 cartes dans les 20 qui restent : on demande quelle est la probabilité qu'il me viendra d'emblée de quoi faire Pierre repic avant d'écarter ni reprendre.

SOLUTION. J'observe 1°. que je ne puis faire Pierre repic qu'au moyen de deux quintes basses : or dans les 20 cartes qui restent, le jeu de Pierre prélevé, il se trouve 4 quintes basses, & je puis avoir 2 de ces quintes basses de $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$ ou 6 manieres différentes, parce qu'il y a $\frac{4 \ldots\ldots \overline{4-2+1}}{1 \cdot 2}$ manieres différentes de prendre 2 sur 4 (XLII.). Mais de quelque maniere que j'aie les 2 quintes basses qu'il me faut, il reste 10 cartes sur lesquelles il en faut 2 pour completter mon jeu : or on peut prendre 2 sur 10 de $\frac{10 \ldots\ldots \overline{10-2+1}}{1 \cdot 2}$ ou 45 manieres : donc $6 \cdot 45$ est le numérateur de la probabilité cherchée.

2°. Le dénominateur est le nombre de manieres dont on peut prendre 12 sur 20, c'est-à-dire, $\frac{20 \ldots\ldots 9}{1 \cdot 2 \ldots 12}$: donc la probabilité cherchée est $6 \cdot 45 : \frac{20 \ldots\ldots 9}{1 \cdot 2 \ldots\ldots 12} = \frac{9}{4199}$.

CXXXVI.

QUESTION 4e. Je joue contre Pierre au jeu nommé la Triomphe ; nous tenons chacun notre jeu en main, & c'est un cœur qui tourne ; j'ai deux cœurs dans mon jeu : on demande quelle est pour moi la probabilité que Pierre a au moins 3 cœurs dans son jeu.

SOLUT. 1°. Pour avoir le numérateur de la probabilité demandée : j'observe que dans la totalité des cartes il se trouve 8 cœurs, & que sur ces 8 cœurs il s'en trouve 2 dans mon jeu & un qui tourne ; il n'y a donc que 5 cœurs qui puissent se trouver dans

H

le jeu de Pierre: or pour ſavoir de combien de manieres Pierre peut avoir dans ſon jeu 3 au moins de ces 5 cœurs, la queſtion peut s'énoncer ainſi : ſur 26 cartes différentes j'en diſtingue 5, & l'on en tire 5 ; de combien de manieres entre les 5 cartes tirées, peut-il s'en trouver 3 au moins d'entre les 5 que j'ai diſtinguées ? pour réſoudre cette queſtion, dans le numérateur de la formule générale du §. LV. je fais $m = 26$, $n = 5$, $p = 5$, $r = 3$; & elle devient $1 + 5 \cdot 21 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{21 \cdot 20}{1 \cdot 2} = 2206$ qui ſera le numérateur de la probabilité demandée.

2°. Pour avoir le dénominateur, j'obſerve que le jeu de Pierre ne peut être pris que dans les 26 cartes que je ne connois point, car ni les cinq qui compoſent mon jeu ni la tourne ne peuvent en faire partie : la queſtion ſe réduit donc à ſavoir de combien de manieres on peut prendre 5 cartes ſur 26 ; or ce nombre de manieres eſt $\frac{26 \ldots\ldots \overline{26 - 5 + 1}}{1 \cdot 2 \ldots\ldots 5}$ $= 65780$ qui ſera le dénominateur cherché. Donc la probabilité demandée eſt $\frac{2206}{65780} = \frac{1103}{32890}$.

CXXXVII.

QUESTION 5e. Je joue au Wisk contre Pierre, Jacques & Jean, nous tenons chacun notre jeu en main, j'ai 4 cœurs dans mon jeu dont l'un eſt la tourne : on demande quelle eſt pour moi la probabilité que Pierre a dans ſon jeu 4 cœurs & Jacques 3 cœurs.

SOLUT. 1°. Pour ſavoir de combien de manieres le hazard déſigné peut avoir lieu, ou ce qui eſt de même, pour avoir le numérateur de la probabilité demandée, il s'agit de ſavoir d'abord de combien de manieres les 9 cœurs qui ne ſont pas dans mon jeu peuvent être diſtribués en 3 parts, l'une

de 4 pour Pierre, la seconde de 3 pour Jacques, & par conséquent la troisieme de 2 pour Jean. Or, pour avoir ce nombre de manieres, il faut dans la formule générale $\frac{m \ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots p} \cdot \frac{\overline{m-p} \ldots \overline{m-p-p'+1}}{1.2 \ldots p'}$ (XLIII.) faire $m=9$, $p=4$, $p'=3$, & elle devient $\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} \cdot \frac{5.4.3}{1.2.3}$. Mais à chacune de ces manieres, les 30 cartes restantes doivent être distribuées en 3 parts, l'une de 9 cartes pour Pierre, la 2e. de 10 cartes pour Jacques, la 3e. de 11 cartes pour Jean, ce qui peut se faire de $\frac{30 \ldots 22}{1.2 \ldots 9} \cdot \frac{21 \ldots 12}{1.2 \ldots 10}$ manieres; donc le numérateur de la probabilité cherchée est $\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} \cdot \frac{5.4.3}{1.2.3} \cdot \frac{30 \ldots 22}{1.2 \ldots 9} \cdot \frac{21 \ldots 12}{1.2 \ldots 10}$.

2°. Le dénominateur est le nombre de manieres dont les 39 cartes qui ne sont pas dans mon jeu peuvent être distribuées en 3 parts égales entre Pierre Jacques & Jean: or le nombre de manieres dont 39 cartes peuvent être partagées en 3 parties égales, est $\frac{39 \ldots 27}{1.2 \ldots 13} \cdot \frac{26 \ldots 14}{1.2 \ldots 13}$; & à chacune de ces manieres les 3 parts peuvent être réparties entre Pierre Jacques & Jean de 1.2.3 ou 6 manieres (LXIV); car Pierre ayant la {1^e^., 2e., 3e.} part, Jacques peut avoir la {(2e./3e.), (1e./3e.), (1e./2e.)} & Jean la {(3e./2e.), (3e./1e.), (2e./1e.)}: donc le dénominateur de la probabilité cherchée est $6 \cdot \frac{39 \ldots 27}{1.2 \ldots 13} \cdot \frac{26 \ldots 14}{1.2 \ldots 13}$. donc cette probabilité est

$\frac{9......6}{1......4} \cdot \frac{5......3}{1......3} \cdot \frac{30...22}{1....9} \cdot \frac{21...12}{1...10} : 6 \cdot \frac{39....27}{1....13} \cdot \frac{26........14}{1........13}$
$= \frac{9295}{740962}$.

CXXXVIII.

QUESTION 6e. Je prends un des 90 numéros de la Lotterie royale de France par extrait ſimple, ou bien 2 numéros par ambe ſimple, ou bien 3 par terne, ou 4 par quaterne, ou 5 par quine, ou 1 par extrait déterminé, ou 2 par ambe déterminé: on demande 1°. quelle eſt dans chacun de ces cas la probabilité que tous mes numéros arrivent dans le prochain tirage; 2°. combien de fois la Lotterie devroit me rendre équitablement ma miſe en cas que mes numéros arrivent; 3°. quelle eſt pour chacun de ces cas l'avantage que la Lotterie a ſur moi dans ſes conditions actuelles.

SOLUT. En premier lieu : dans la formule générale du §. LI. Je fais $m = 90$, $p = 5$; & je ſubſtitue ſucceſſivement à r, les nombres 1, 2, 3, 4 & 5; par quoi cette formule devient

Pour le 1er. cas, $\frac{89........86}{1.2.3.4} \cdot \frac{1.2.3.4.5}{90............86} = \frac{1}{18}$,

Pour le 2e. cas, $\frac{88.87.86}{1.2.3} \cdot \frac{1.2.3.4.5}{90............86} = \frac{2}{801}$,

Pour le 3e. cas, $\frac{87.86}{1.2} \cdot \frac{1.2.3.4.5}{90............86} = \frac{1}{11748}$,

Pour le 4e. cas, $86 \cdot \frac{1.2.3.4.5}{90............86} = \frac{1}{511038}$,

Pour le 5e. cas, $\frac{1.2.3.4.5}{90............86} = \frac{1}{43949268}$,

ce qu'il falloit 1°. trouver.

En ſecond lieu : ſi je parie 1 pour un événement dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$; pour que le pari ſoit équitable, il faut que la miſe de celui qui parie contre moi que cet événement n'aura pas lieu ſoit

$\frac{m-n}{n}$ (XVIII.); donc repréſentant par 1 la miſe que je fais à la lotterie dans chacun des 5 cas ci-deſſus dits, & par $\frac{n}{m}$ la probabilité que mes numéros arriveront: $\frac{m-n}{n}+1$ ou $\frac{m}{n}$ repréſentera ce que la Lotterie devroit équitablement me payer lorſque tous mes numéros arrivent. Je dis $\frac{m-n}{n}+1$ & non pas ſeulement $\frac{m-n}{n}$; parce que j'ai commencé par confier ma miſe 1 en m'intéreſſant à la Lotterie; ainſi elle devroit avant tout compte m'être remiſe quand je gagne le pari : donc en ſuppoſant que tous mes numéros arrivent, la Lotterie devroit équitablement me remettre

Au 1er. cas, 18
Au 2e. cas, $400+\frac{1}{2}$
Au 3e. cas, 11748
Au 4e. cas, 511038
Au 5e. cas, 43949268
} fois ma miſe 1,

ce qu'il falloit 2°. trouver.

En 3e. lieu : pour connoître l'avantage de la Lotterie en chacun des cinq cas ci-deſſus dits, il faut, de ce qu'elle devroit me payer équitablement au cas où mes numéros arrivent, retrancher ce qu'elle me paye effectivement : & j'aurai

Au 1er. cas, $18-15 = 3$,
Au 2e. cas, $400+\frac{1}{2}-270=130+\frac{1}{2}$,
Au 3e. cas, $11748-5200= 6548$,
Au 4e. cas, $511038-70000= 441038$,
Au 5e. cas, $43949268-1000000= 42949268$:

d'où l'on voit que la Lotterie eſt avantagée dans chacun de ces cas d'une partie déterminée de ce qui

devroit équitablement m'advenir en cas de gain; sav. au 1er. cas, de $\frac{3}{18}$ ou $\frac{1}{6}$; au 2e. cas, de $\frac{130+\frac{1}{2}}{400+\frac{1}{2}}$ ou $\frac{29}{89}$; au 3e. cas, de $\frac{6548}{11748}$ ou $\frac{1637}{2937}$; au 4e. cas, de $\frac{441038}{511038}$ ou $\frac{220519}{255519}$; au 5e. cas, de $\frac{42949268}{43949268}$ ou $\frac{10737317}{10987317}$. ce qui restoit à trouver pour les 5 premiers cas.

A l'égard du 6e. & du 7e. cas, pour avoir la probabilité que $\left(\begin{array}{l}\text{le numéro}\\ \text{les 2 numéros}\end{array}\right)$ que j'ai pris $\left(\begin{array}{l}\text{arrivera}\\ \text{arriveront chacun}\end{array}\right)$ à la place du tirage qui lui a été assignée : dans la formule générale du §. XCV. je fais $m = 90$, $p = 5$, $n = r = \left\{\begin{array}{l}1\\ 2\end{array}\right.$; & elle se réduit à $\left\{\begin{array}{l}\frac{89 \ldots\ldots 86}{90 \ldots\ldots 86} = \frac{1}{90}\\ \frac{88 \ldots\ldots 86}{90 \ldots\ldots 86} = \frac{1}{8010}\end{array}\right.$ qui est la probabilité cherchée : donc ce que la Lotterie devroit équitablement me payer en cas de gain, est $\left\{\begin{array}{l}90\\ 8010\end{array}\right.$ fois ma mise 1; ainsi l'avantage de la Lotterie dans ce cas est $\left\{\begin{array}{l}\frac{90-70}{90} = \frac{2}{9}.\\ \frac{8010-4900}{8010} = \frac{311}{801}.\end{array}\right.$ ce qui restoit à trouver.

Je crois inutile d'avertir ici le Lecteur que l'équité dont il vient d'être parlé est purement numérique, & ne préjudicie aucunement à l'équité légitime qui peut se trouver dans les avantages de la Lotterie relativement à la liberté que les actionnaires ont de s'y intéresser, aux frais indispensables de son administration, ainsi qu'aux objets utiles & louables auxquels ces avantages sont affectés.

C X X X I X.

QUESTION 7e. Sur un plan horizontal & quarré *ABED* dans lequel eſt inſcrit un cercle *HGFI* (Fig. 1e.) je fais rouler une boule au hazard; on demande quelle eſt la probabilité que la boule ceſſant de ſe mouvoir s'arrêtera dans le cercle.

SOLUT. Nommant $\frac{n}{m}$ la probabilité cherchée: 1°. la ſomme des points du quarré *ABCD*, ou ce qui eſt de même, la ſurface de ce quarré exprime le nombre total des chances : donc $m = AB^2$, & nommant r le rayon CF du cercle inſcrit, on a $m = 4r^2$.

2°. La ſomme des points de la ſurface du cercle inſcrit, ou ce qui eſt de même, la ſurface du cercle inſcrit exprime le nombre des chances qui donnent le hazard dont on cherche la probabilité : donc $n =$ circonfér. $HGFI \times \frac{CF}{2}$; & nommant $\mathfrak{C}$ le rapport de la circonférence au diametre; circonf. $\frac{HGFI}{2CF} = \mathfrak{C}$; donc circonférence $HGFI = \mathfrak{C} . 2 CF$; donc $n = \mathfrak{C} . CF^2 = \mathfrak{C} . r^2$; donc la probabilité cherchée $\frac{n}{m} = \frac{\mathfrak{C} r^2}{4r^2} = \frac{\mathfrak{C}}{4}$; *C.Q.F.T.*

C X L.

QUESTION 8e. Sur un plan horizontal & quarré *ABED* (Fig. 2.) dans lequel eſt inſcrit un octogone régulier *abcdefgh*, on fait rouler une boule au hazard juſqu'à ce qu'elle s'arrête; & l'on recommence la même choſe quatre fois de ſuite : on demande quelle eſt la probabilité que la boule s'arrêtera au moins une fois hors de l'octogone.

Solut. Nommant t le côté du quarré, u le côté de l'octogone : j'ai $ah = \sqrt{\overline{Aa}^2 + \overline{Ah}^2}$; donc ab, $u = Aa\sqrt{2}$: Mais $AB = Aa + ab + bB = 2Aa + ab$; donc $t = 2Aa + u$; donc $Aa = \frac{t-u}{2}$; donc $u = \frac{t-u}{\sqrt{2}}$; ou bien $u = \frac{t}{\sqrt{2}+1}$.

Or la surface du quarré $ABED$ est t^2; & la surface de l'octogone est le périmetre $abcdefgh \times \frac{CF}{2} = 8u \cdot \frac{t}{4} = 2tu = \frac{2t^2}{\sqrt{2}+1}$: donc la surface du quarré moins celle de l'octogone, est $t^2 \cdot \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{2}+1} \right\} = t^2 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, ce qui seroit dans le cas d'une seule épreuve le numérateur de la probabilité cherchée dont t^2 seroit le dénominateur; donc dans le cas d'une seule épreuve, la probabilité cherchée seroit $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; mais dans l'hypothese il y a quatre épreuves; donc la probabilité cherchée est (CIII.)

$$1 - \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right\}^4 = \frac{1 + 12\sqrt{2}}{17 + 12\sqrt{2}}.$$

CXLI.

Question 9e. Sur un plan circulaire horizontal $AFBKDG$ (Fig. 3e.) dont le diametre est AK ($2r$) & dans lequel sont inscrits un triangle équilatéral ABD, & un quarré $HFGI$, dont les bases BD & HI sont paralleles entr'elles & perpendiculaires au diametre AK; on fait rouler une boule jusqu'à ce que son mouvement soit anéanti, & on recommence 8 fois de suite la même chose : on demande quelle est la probabilité que dans ces 8 épreuves la boule s'arrêtera au moins une fois dans le triangle, & au moins une fois dans le quarré.

Solut. Nommant $\frac{n}{m}$ la probabilité que la boule s'arrêtera dans le triangle, & $\frac{p}{m}$ la probabilité que la boule s'arrêtera dans le quarré, dans le cas d'une seule épreuve; φ étant le nombre des chances qui donnent les 2 hazards à la fois: $\frac{m^8 - \overline{m-n}^8 - \overline{m-p}^8 + \overline{m-n-p+\varphi}^8}{m^8}$ sera la probabilité cherchée (CXXV.).

Mais m est la surface du cercle $AFBKDG$; n est la surface du triangle ABD; p est la surface du quarré $HFGI$; & φ qui est celle de l'exagone irrégulier $OQRTSP = n - BR \cdot QR - ON \cdot AN$; cela posé:

1°. $m = \epsilon r^2$ (ϵ exprimant le rapport de la circonférence au diametre.).

2°. $n = BM \cdot AM = \sqrt{\overline{BK}^2 - \overline{MK}^2} \cdot AM = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} \cdot \frac{3r}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot r^2$.

3°. $KL \cdot LA = \overline{HL}^2$; donc $KL \cdot \overline{LN + NA} = \overline{HL}^2$, ou bien $KL \cdot \overline{HI + KL} = \frac{\overline{HI}^2}{4}$; d'où l'on tire $KL = \frac{HI}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{p}}{2} (\sqrt{2} - 1)$.

Mais $KL = AK - LA = 2r - NL - AN = 2r - \sqrt{p} - KL$; donc $2KL$ ou $\sqrt{p}(\sqrt{2} - 1) = 2r - \sqrt{p}$; donc $p = 2r^2$.

4°. $BR = MB - HL = \frac{\sqrt{3}}{2} r - \frac{\sqrt{p}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \cdot r$; de plus $BR, \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} r : QR :: MB, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r : AM, \frac{3r}{2}$; donc $QR = \frac{3 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot r$; donc $BR \cdot QR = \frac{5\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{4} \cdot r^2$. D'ailleurs AN ou KL ou $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} r$:

$ON :: AM, \frac{3r}{2} : BM . \frac{\sqrt{3}}{2} r$; donc $ON = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}.\sqrt{3}} r$; donc $ON . AN = \frac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} r^2$; donc $\phi = \frac{3\sqrt{3}}{4} . r^2 - \frac{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{4} r^2 - \frac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} r^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right) r^2$; donc la probabilité cherchée eſt

$$\frac{\varsigma^8 - \left(\varsigma - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^8 - (\varsigma - 2)^8 + \left(\varsigma - 2 - 7\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^8}{\varsigma^8};$$

C. Q. F. T.

CXLII.

QUESTION 10e. Sur un plan horizontal carrelé de carreaux réguliers égaux je jette en l'air un écu ; on demande quelles ſont les probabilités que l'écu après ſa chûte ſe trouvera poſé ſur un ſeul ou ſur pluſieurs de ces carreaux.

SOLUT. Les carreaux étant par l'hypotheſe des polygones réguliers égaux, ſont néceſſairement ou des triangles équilatéraux, ou des quarrés, ou des éxagones réguliers égaux : 1°. pour trouver la probabilité que l'écu après ſa chûte ſe trouvera ſur un ſeul carreau : j'inſcris dans un des carreaux

{ triangle *ABC* / quarré *ABCD* / éxagone *ABCDEF* } (Figure { 4 / 5 / 6 }),

une figure ſemblable { *a b c* / *a b c d* / *a b c d e f* } éloignée des côtés du carreau de la longueur *Gg* du rayon de l'écu : il eſt clair que ſi le centre de l'écu ſe trouve ſur la ſurface du polygone intérieur, l'écu ſe trouvera tout entier ſur le carreau ; & que ſi le centre de l'écu ſe trouve hors de ce polygone intérieur,

l'écu ſe trouvera au moins en partie hors du carreau : ainſi la ſurface $\left\{\begin{matrix} ABC \\ ABCD \\ ABCDFF \end{matrix}\right.$ eſt le nombre total des chances ; & la ſurface $\left\{\begin{matrix} abc \\ abcd \\ abcdef \end{matrix}\right.$ eſt le nombre des chances qui donnent le hazard dont on cherche la probabilité : ainſi la probabilité P que l'écu après ſa chûte ſe trouvera tout entier ſur le $\left\{\begin{matrix} \text{triangle} \\ \text{quarré} \\ \text{exagone} \end{matrix}\right.$, eſt $\left\{\begin{matrix} \dfrac{\text{ſurf. } abc}{\text{ſurf. } ABC} \\ \dfrac{\text{ſurf. } abcd}{\text{ſurf. } ABCD} \\ \dfrac{\text{ſurf. } abcdef}{\text{ſurf. } ABCDEF} \end{matrix}\right.$.

Nommant k le côté du carreau, r le rayon de l'écu ; & O étant le centre du polygone : on a ſurf. $ABC = \frac{k.BG}{2}$; $BG = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AG}^2} = \frac{k.\sqrt{3}}{2}$; donc ſurf. $ABC = \frac{k^2.\sqrt{3}}{4}$: de même ſurf. $abc = \frac{\overline{bc}^2.\sqrt{3}}{4}$; mais $AB, k : bc :: OG, \frac{BG}{3}, \frac{k.\sqrt{3}}{6}$: $Og, OG - Gg, \frac{k.\sqrt{3}}{6} - r$; donc $bc = k - 2r.\sqrt{3}$; donc pour le triangle $P = \frac{k^2 - 4\sqrt{3}.kr + 12r^2}{k^2}$.

Dans le quarré $AB, k : OG, \frac{k}{2} :: ab : Og, OG - Gg, \frac{k}{2} - r$; donc $ab = \frac{k^2 - 2kr}{k} = k - 2r$, donc $P = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{k^2 - 4kr + 4r^2}{k^2}$.

Dans l'éxagone : $\overline{AO}^2 - \overline{AG}^2 = k^2 - \frac{k^2}{4} = \frac{3k^2}{4}$; donc $OG = \frac{k\sqrt{3}}{2}$; de plus AB, $k : ab :: OG$, $\frac{k.\sqrt{3}}{2} : Og$, $OG - Gg$, $\frac{k.\sqrt{3}}{2} - r$; donc $ab = \frac{k\sqrt{3} - 2r}{\sqrt{3}}$; donc $P = \frac{\text{surf. } abcdef}{\text{surf. } ABCDEF} = \frac{ab.Og}{AB.OG} = \frac{3k^2 - 4kr\sqrt{3} + 4r^2}{3k^2}$.

Si on fait $\frac{1}{2} = \left\{\begin{matrix} (k^2 = 4kr\sqrt{3} + 12r^2) : k^2 \\ (k^2 - 4kr + 4r^2) : \quad k^2 \\ (3k^2 - 4kr\sqrt{3} + 4r^2) : 3k^2 \end{matrix}\right.$; on en déduit $\frac{k}{r} = \left.\begin{matrix} 2\sqrt{3} . (2 + \sqrt{2}) \\ 2 . (2 + \sqrt{2}) \\ \frac{2}{\sqrt{3}} . (2 + \sqrt{2}) \end{matrix}\right\}$; ce qui exprime, pour le triangle, le quarré & l'exagone, le rapport qui doit se trouver entre le côté du polygone & le rayon de l'écu, pour pouvoir parier équitablement, à mises égales, que l'écu après sa chûte se trouvera tout entier sur un seul carreau.

Pour avoir la probabilité que l'écu se trouvera sur 2 ou un plus grand nombre de carreaux, j'observe que ce hazard aura lieu, quelque part que le centre de l'écu soit placé entre les périmetres $\left\{\begin{matrix} ABC \text{ \& } abc \\ ABCD \text{ \& } abcd \\ ABCDEF \text{ \& } abcdef \end{matrix}\right\}$; donc le nombre des chances qui donnent ce hazard est exprimé par les surfaces qu'entourent ces périmetres, c'est-à-dire,

par $\begin{Bmatrix} 3\,k\,r - 3\,\sqrt{3}\,.\,r^2, & \text{dans le triangle} \\ 4\,k\,r - 4\,r^2 & \text{dans le quarré} \\ 6\,k\,r - 2\,\sqrt{3}\,.\,r^2 & \text{dans l'éxagone} \end{Bmatrix}$; d'où

l'on tire $P = \begin{Bmatrix} (4\,k\,r\,.\,\sqrt{3} - 12\,r^2) : k^2 \\ (4\,k\,r - 4\,r^2) : k^2 \\ (4\,k\,r\,.\,\sqrt{3} - 4\,r^2) : 3k^2 \end{Bmatrix}$;

& égalant ces probabilités à $\frac{1}{2}$, on en déduit

comme ci-dessus, $\frac{k}{r} = \begin{Bmatrix} 2\,\sqrt{3}\,.\,(2 + \sqrt{2}) \\ 2\,.\,(2 + \sqrt{2}) \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\,.\,(2 + \sqrt{2}) \end{Bmatrix}$.

3°. Pour avoir la probabilité que l'écu, après sa chûte, se trouvera sur 3 carreaux au moins : de la pointe de chaque angle des figures intérieures, je prolonge les côtés de ces figures jusqu'à leur rencontre avec le périmetre du carreau : la somme des parallélogrammes *A M a m* qui en naîtront sera celle des points où le centre de l'écu doit être placé pour que l'écu soit sur plus de 2 carreaux ; ainsi la somme de ces parallélogrammes, c'est-à-dire $2\,\sqrt{3}\,.\,r^2$ pour le triangle, $4\,r^2$ pour le quarré, $4\,\sqrt{3}\,.\,r^2$ pour l'éxagone, exprimera le nombre des chances qui donnent le hazard dont il s'agit : divisant cette quantité par la surface du carreau qui exprime le nombre total des chances, on aura la probabilité cherchée qui est $8\,r^2 : k^2$ pour le triangle, $4\,.\,r^2 : k^2$ pour le quarré, $8\,r^2 : 3\,k^2$ pour l'exagone ; & égalant ces probabilités à $\frac{1}{2}$; on tire $\frac{k}{r} = 4$, $2\sqrt{2}$, & $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

4°. La probabilité que l'écu après sa chûte se trouvera sur deux carreaux sans plus, se connoîtra en observant que ce hazard a lieu quand le centre de l'écu se trouve entre les périmetres du carreau & de la figure intérieure, & hors des parallélogrammes *AM am*, & divisant ces parties de surfaces par celle du carreau, & on aura pour cette probabilité $(4\sqrt{3}\,.\,kr - 20r^2) : k^2$ dans le triangle, $(4kr - 8r^2) : k^2$ pour le quarré, & $(4kr - 4\sqrt{3}\,.\,r^2) : \sqrt{3}\,.\,k^2$ pour l'éxagone : & égalant ces probabilités à $\frac{1}{2}$; on a pour le pari équitable à mises égales, $\frac{k}{r} = \frac{20}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ pour le triangle, 4 pour le quarré, & $\frac{2}{\sqrt{3}}(2+\sqrt{-2})$ pour l'exagone : d'où l'on voit que si les carreaux sont des exagones réguliers, le pari ne peut se faire équitablement à mises égales, à cause de la quantité imaginaire $\sqrt{-2}$.

5°. Pour avoir la probabilité que l'écu après sa chûte se trouvera sur 6 carreaux triangulaires, ou sur 4 quarrés, ou sur 3 carreaux exagones : du sommet d'un angle du carreau pour centre & du rayon *Gg* de l'écu, j'imagine un cercle qui coupe les côtés du carreau en deux points *P* & *Q* : les secteurs $3PCQ$, $4PDQ$, $6PFQ$, ou ce qui est de même, $\frac{cr^2}{2}$, cr^2, $2cr^2$ (c étant le rapport de la circonférence au diametre) exprimeront pour le triangle, le quarré & l'exagone, le nombre des chances qui donnent le hazard dont s'agit : ainsi la probabilité *P* de ce hazard sera $\frac{2cr^2}{\sqrt{3}k^2}$, $\frac{c\,.\,r^2}{k^2}$, & $\frac{4cr^2}{3\sqrt{3}\,.\,k^2}$; & si on fait $P = \frac{1}{2}$; on aura $\frac{k}{r} = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt[4]{3}}$, $\sqrt{2c}$ & $\frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{3}\,.\,\sqrt[4]{3}}$.

6°. Pour avoir la probabilité que l'écu après sa chûte se trouvera sur 3 carreaux & 2 joints sans plus : des parallélogrames $3\,AMam$, $4\,AMam$, $6\,AMam$ ou $2\sqrt{3}\,.\,r^2$, $4\,.\,r^2$, $4\sqrt{3}\,.\,r^2$, je retranche les secteurs $3\,PCQ$, $4\,PDQ$, $6\,PFQ$, ou $\frac{c}{2}\,.\,r^2$, $c\,.\,r^2$, $2\,c\,.\,r^2$; les restes $(2\sqrt{3} - \frac{c}{2})\,.\,r^2$, $(4 - c)\,.\,r^2$, $2\,.\,(2\,.\sqrt{3} - c)\,.\,r^2$ exprimeront pour le triangle, le quarré & l'exagone, le nombre des chances qui donnent le hazard dont s'agit : d'où l'on déduit $P = \frac{8\,.\sqrt{3} - 2\,c}{\sqrt{3}}\,.\,\frac{r^2}{k^2}$, $(4 - c)\,.\,\frac{r^2}{k^2}$, $\frac{8\sqrt{3} - 4\,c}{3\sqrt{3}}\,.\,\frac{r^2}{k^2}$; & égalant ces valeurs de P à $\frac{1}{2}$, on en déduit $\frac{k}{r} = \frac{2\,.\sqrt{(4\sqrt{3} - c)}}{\sqrt[4]{3}}$, $\sqrt{2}\,.\sqrt{(4 - c)}$, & $\frac{2\sqrt{2}\,.\sqrt{(2\sqrt{3} - c)}}{3^{\frac{3}{4}}}$.

La méthode dont on s'est servi pour résoudre cette 10e. question peut s'employer pour trouver la probabilité de toutes les positions que l'écu pourroit avoir sur des carreaux irréguliers égaux ou inégaux, tels que triangles rectangles, lozanges, parallellogrammes rectangles ou obliquangles, &c.

Cette question & la suivante sont extraites des œuvres de M. de Buffon, au traité qui a pour titre : *Essai d'Arithmétique morale.*

CXLIII.

QUESTION IIe. Sur un plancher composé de planches égales & parallelles, on jette en l'air une baguette; on demande quelle est la probabilité que

cette baguette après sa chûte croisera un des joints paralleles du plancher.

SOLUT. Soit $ABCD$ (Fig. 7.) l'une des planches : entre les joints paralleles AB & CD, je tire deux autres paralleles ab & ca éloignées des premieres chacune de la demi-longueur de la baguette.

1°. Il est clair que si le milieu de la baguette se trouve dans l'espace $abcd$, la baguette ne peut, dans quelque situation qu'elle se trouve, croiser AB ni CD.

2°. Si le milieu de la baguette se trouve dans l'espace $AB\ ab$; elle peut, selon sa situation, croiser ou ne pas croiser le joint AB. Je mene une perpendiculaire HL entre les deux lignes AB & ab; d'un point quelconque P de cette ligne HL pris pour centre, & de la moitié de la longueur de la baguette pour rayon, je décris un cercle qui coupe la ligne AB aux points G & g, & le prolongement de HL en M. Cela posé : je dis que le milieu de la baguette se trouvant au point P, ou dans la partie infiniment petite Pp; le nombre des positions possibles de la baguette dans lesquelles elle croise AB, est représenté par Pp. arc GMg, comme il est évident : & dans chaque petite partie Pp de la ligne LH où le milieu de la baguette peut se trouver, le nombre des positions où la baguette croise AB est représenté par le produit de ce Pp par son arc correspondant GMg: nommant donc dx & y les variables correspondantes Pp & GMg; ydx sera le nombre des positions où la baguette croisera AB, tandis que son milieu sera dans une partie infiniment petite de la ligne LH: donc le nombre des positions où la baguette croisera AB son milieu étant dans la ligne LH, est $\int y\, dx$; & comme il y a autant de lignes LH dans

l'espace

l'eſpace $AB\,ab$ qu'il y a de points dans la ligne AB; $AB.\int y\,dx$ ſera le nombre des poſitions où la baguette croiſe AB, ſon milieu étant dans l'eſpace $AB\,ab$.

3°. Si le milieu de la baguette ſe trouve dans l'eſpace $CD\,cd$, on trouvera de même que le nombre des poſitions où la baguette croiſe CD, eſt $CD.\int y\,dx$; ou $AB.\int y\,dx$: donc le nombre des chances qui donnent le hazard dont il s'agit, eſt $2\,AB.\int y\,dx$.

4°. Le nombre de toutes les poſitions poſſibles de la baguette ſur la planche $ABCD$ eſt évidemment $AB.AC.c$ (c repréſentant la circonférence dont la baguette eſt le diametre :) donc la probabilité cherchée eſt $\frac{2\,AB.\int y\,dx}{AB.AC.c} = \frac{2\int y\,dx}{AC.c}$.

Pour avoir la ſurface repréſentée par $\int y\,dx$, je décris une cycloïde ordinaire $BDAdb$ (Fig. 8e.) dont le cercle générateur a pour diametre AE longueur de la baguette : par le milieu C de AE je mene une parallele DCd à la baſe BEb de la courbe qu'elle coupera en D & d; du même point C pour centre je décris le cercle générateur qui touche la cycloïde à ſon ſommet A, & ſa baſe à ſon milieu E, & qui coupe la droite Dd aux points M & m.

Je dis que l'aire $MDAdm$ terminé par la cycloïde, le cercle & la ligne Dd, eſt $= \int y\,dx$: car prenant ſur la ligne $AC = LH$, un point quelconque P; de ce point menant une double ordonnée RPR de la cycloïde parallélement à Bb, laquelle coupera le cercle en Q & Q, & menant la double ordonnée infiniment proche rpr qui coupe le cercle en q & q; le petit aire $RQqr = QR.Pp$; mais par la nature de la cycloïde, chaque droite QR eſt égal à l'arc de cercle correſpondant QA; donc le petit aire $RQqr = Pp.AQ$; donc

$\int QRrq = \int Pp \cdot AQ$, ou ce qui eſt de même, l'aire $2 \cdot QARQ = \int QAQ \cdot Pp = \int y\,dx$; donc l'aire $MDAmd =$ la fonction $\int y\,dx$ dans laquelle on fait $x = AC = LH$.

CXLIV.

Nous terminerons ce chapitre par une queſtion, dont la ſolution mettra le lecteur à portée d'apprécier la commune opinion où l'on eſt, que la multitude des épreuves d'un pari déſavantageux peut le rendre avantageux à la longue; de maniere que celui qui a perdu une fois un pari de cette eſpece, tente au riſque de ſa fortune, en le réitérant un certain nombre de fois, de regagner à la fin non-ſeulement ce qu'il aura perdu dans toutes les épreuves antérieures, mais même de gagner en ſus ce qu'il vouloit gagner d'abord à la premiere épreuve.

CXLV.

QUESTION 12[e]. J'engage une miſe 1 au pari d'un événement dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$, contre Pierre qui parie une miſe F que cet événement n'aura pas lieu; avec les conditions, 1°. que ſi je perds le pari à une 1[re]. épreuve, nous le recommencerons à une 2[e]. épreuve; & que je parierai contre lui une miſe $\frac{F+1}{F}$ contre $1+F$ pour le même événement : 2°. que ſi je perds encore à la 2[e]. épreuve, je reparierai contre lui à une 3[e]. épreuve $\left(\frac{F+1}{F}\right)^2$ contre $1 + \frac{F+1}{F} + F$ ou $\frac{\overline{F+1}^2}{F}$ pour le même événement : 3°. que ſi je perds encore à la 3[e]. épreuve, je reparierai contre lui à une 4[e]. épreuve $\left(\frac{F+1}{F}\right)^3$ contre $1 + \frac{F+1}{F} + \frac{\overline{F+1}^2}{F} + F$

ou $\frac{\overline{F+1}^3}{F^2}$ pour le même événement : 4°. que si je perds encore à la 4°. épreuve, nous continuerons le pari suivant la même loi, & que Pierre tiendra la gageure, un nombre déterminé N d'épreuves ; de maniere que si je gagne avant la N^e ou à la N^e épreuve, il me restera de gain la quantité F ; & que si je perds à toutes les N épreuves, je payerai à Pierre la somme de toutes mes mises ; c'est-à-dire ;

$$1 + \frac{F+1}{F} + \left(\frac{F+1}{F}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{F+1}{F}\right)^{N-1},$$

ou $\frac{\overline{F+1}^N - F^N}{F^{N-1}}$: on demande si les conditions auxquelles j'ai la faculté de renouveller ainsi le pari pendant un nombre déterminé N d'épreuves, rendent ce pari plus ou moins avantageux pour moi, qu'il n'auroit été s'il n'y eût eu qu'une seule épreuve.

Solut. 1°. La probabilité que l'événement pour lequel je parie arrivera dans le cours des N épreuves, est $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N$ (CIII.).

2°. La probabilité qu'il n'arrivera pas, est $\left(1 - \frac{n}{m}\right)^N$ (CI.).

3°. La somme que je perdrai, s'il n'arrive pas, est $\frac{\overline{F+1}^N - F^N}{F^{N-1}}$.

4°. La somme que je gagnerai s'il arrive, est F. Donc ce que je devrois gagner, si l'événement pour lequel je parie arrive, est le 4°. terme x de la proposition suivante $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N : \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N ::$

$$\frac{\overline{F+1}^N - F^N}{F^{N-1}} : x = \frac{\left(\overline{F+1}^N - F^N\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N}{F^{N-1} - F^{N-1} \cdot \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N} : \text{d'où}$$

l'on voit que l'avantage que j'ai dans ce pari, (s'il y en a) eſt le rapport de l'excès de ce que j'ai ſur ce que je dois équitablement avoir en cas de gain, à ce que je dois équitablement avoir; c'eſt-à-dire,

$$\left\{ F - \frac{(\overline{F+1}^N - F^N).(1 - \frac{n}{u})^N}{F^{N-1} - F^{N-1}(1 - \frac{n}{m})^N} \right\} :$$

$$\frac{(\overline{F+1}^N - F^N).(1 - \frac{n}{m})^N}{F^{N-1} - F^{N-1}.(1 - \frac{n}{m})^N}$$

$$= \frac{F^N - F^N.(1-\frac{n}{m})^N - \overline{F+1}^N.(1-\frac{n}{m})^N + F^N.(1-\frac{n}{m})^N}{(\overline{F+1}^N - F^N).(1 - \frac{n}{m})^N}$$

$$= \frac{F^N - \overline{F+1}^N.(1 - \frac{n}{m})^N}{(\overline{F+1}^N - F^N).(1 - \frac{n}{m})^N}.$$

Mais cet avantage eſt poſitif, nul ou négatif, ſelon que $F^N \gtreqless \overline{F+1}^N . (1 - \frac{n}{m})^N$, ou que $F \gtreqless \overline{F+1} . (1 - \frac{n}{m})$, ou que $Fm \gtreqless Fm + m - Fn - n$, ou que $Fn \gtreqless m-n$; ou enfin que $F \gtreqless \frac{m-n}{n}$.

Ainſi le rapport de F à $\frac{m-n}{n}$ qui détermine l'avantage, l'équité ou le déſavantage du pari en une ſeule épreuve, le détermine encore dans un nombre quelconque N d'épreuves: avec cette différence, que lorſque le pari eſt équitable en une ſeule épreuve, il reſte toujours équitable, quelque ſoit le nombre des épreuves; au lieu que lorſque le pari eſt avantageux ou déſavantageux pour un des parieurs, cet avantage ou déſavantage croît dans un nombre don-

né N d'épreuves, ſuivant une fonction combineé des quantités F, $\frac{m}{n}$ & N.

D'où l'on voit que malgré l'augmentation de probabilité qu'un parieur acquiert par la multiplicité des épreuves; ſi le pari eſt déſavantageux pour lui à la premiere épreuve, il le devient beaucoup plus en la réitérant: parce que ſes miſes augmentent dans un plus grand rapport que les probabilités de l'événement qui peut le faire gagner.



CHAPITRE VI.

De l'Évaluation des Probabilités par les Expériences ou Observations.

§. CXLVI.

LES faits ou les propositions dont il nous est possible d'évaluer les probabilités par une analyse exacte, sont en très-petit nombre & d'une médiocre importance relativement à ceux à l'égard desquels on ne peut ni assigner un nombre total de chances également possibles, ni déterminer le nombre de celles d'entre ces chances qui donnent les hazards dont s'agit : à ce défaut on peut avoir recours aux observations & expériences, au moyen desquelles on trouvera à peu près la probabilité qu'il importe de connoître, non pas certainement, mais avec une espérance qui approchera fort de la certitude. En effet : il est d'expérience que dans une multitude d'épreuves d'un même acte, mouvement ou état de choses, le nombre des retours de chacun des hazards qui en dépendent est à-peu-près en proportion de la probabilité de ce hazard : de maniere, par exemple, que dans une multitude de jets de 2 dés à jouer ordinaires il vient à-peu-près cinq dés simples pour un doublet, chaque point simple revient à-peu-près le même nombre de fois que chacun des autres, il en est de même de chaque doublet, & ainsi des autres hazards; en sorte qu'en prenant pour dénominateur le nombre total des épreuves, & pour numérateur le nombre de fois

qu'un hazard ſera arrivé dans le cours de ces épreuves ; il eſt preſque certain que la fraction approchera de la véritable probabilité de ce hazard.

Telle eſt la méthode que nous allons développer dans ce Chapitre, laquelle n'eſt pas ſeulement fondée ſur l'expérience, ni ſur une vague métaphyſique, mais qui eſt ſuſceptible d'une démonſtration rigoureuſe, ainſi qu'on le verra par les proportions ſuivantes.

CXLVII.

Théorême. Si l'acte ou mouvement duquel dépend un hazard ſpécifié eſt réitéré un certain nombre N de fois, & ſi on nomme $\frac{n}{m}$ la probabilité de ce hazard; je dis que le nombre de fois que ce hazard doit le plus probablement arriver dans le cours des épreuves ſuppoſées, eſt le nombre entier intermédiaire entre les 2 fractions $\overline{N+1}\cdot\frac{n}{m}$ & $\overline{N+1}\,\frac{n}{m}-1$; & que ſi ces 2 fractions ſont réductibles en nombres entiers, chacun de ces nombres eſt le nombre de fois que le hazard ſpécifié doit le plus probablement arriver.

Démonst. Nous avons vu (CXIII.) que $\frac{n}{m}$ étant la probabilité d'un événement, la probabilité que cet événement arrivera le nombre de fois x juſte en un nombre N d'épreuves, eſt $\frac{N\ldots\overline{N-x+1}}{1.2.3\ldots\ldots x}\cdot\frac{n^x}{m^N}\cdot\overline{m-n}^{N-x}$; donc le nombre de fois juſte que ce hazard doit le plus probablement arriver dans le cours des N épreuves ſuppoſées, eſt la valeur de x dans le cas où la fonction variable

$\frac{N\ldots\ldots\overline{N-x+1}}{1.2.3\ldots\ldots x}\cdot\frac{n^x}{m^N}\cdot\overline{m-n}^{N-x}$ eſt à ſon état de

maximum ; c'eſt-à-dire, la plus grande poſſible : or, ſi dans cette fonction variable on ſubſtitue ſucceſſivement à x tous les nombres entiers depuis o jusqu'à N incluſivement ; cette fonction augmentera continuellement à chaque ſubſtitution juſqu'à un certain terme, paſſé lequel elle diminuera ; & il eſt évident que le terme où cette quantité paſſera de l'augmentation à la diminution, eſt en même temps celui où ſes valeurs immédiatement conſécutives ſont égales, & où ſa valeur eſt la plus grande poſſible : cela poſé,

Si dans $\frac{N \ldots\ldots \overline{N-x+1}}{1.2 \ldots\ldots\ldots\ldots x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{N-x}$, je ſubſtitue à x, les quantités $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}$ & $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m} - 1$; elle devient

$$P, \frac{N \ldots (N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+1)}{1.2.3 \ldots \overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}} \cdot \frac{n^{\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}}}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}},$$

$$P', \frac{N \ldots (N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+2)}{1.2.3 \ldots (\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}-1)} \cdot \frac{n^{\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}-1}}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+1} ;$$

d'où l'on voit que $P = P' \cdot \frac{N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+1}{\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}} \cdot \frac{n}{m-n}$,

mais $\frac{N-\overline{N+1} \frac{n}{m}+1}{\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}} \cdot \frac{n}{m-n} = 1$, car

$$(N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+1) \cdot n = \overline{N+1} \cdot \frac{n}{m} \cdot \overline{m-n},$$

comme il eſt aiſé de s'en convaincre : donc $P' = P$; donc la plus grande valeur de la fonction variable $\frac{N \ldots\ldots \overline{N-x+1}}{1.2 \ldots\ldots x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{N-x}$ eſt, lorſque

$x = \overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}$ ou $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m} - 1$, ou le nombre entier intermédiaire entre ces deux valeurs, ſi ce ſont des fractions. *C. Q. F. D.*

CXLVIII.

Coroll. Si $N\frac{n}{m}$ eſt un nombre entier $N\frac{n}{m} + \frac{n}{m}$ & $N\frac{n}{m} + \frac{n}{m} - 1$, ou bien $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}$ & $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m} - 1$ ſont des fractions, & $N\frac{n}{m}$ eſt le ſeul nombre entier qu'il puiſſe y avoir entre ces 2 fractions; par conſéquent le nombre de fois que le hazard ſpécifié doit le plus probablement arriver.

CXLIX.

Remarque. Si dans la quantité $\frac{N \ldots \overline{N-x+1}}{1 \cdot 2 \ldots\ldots x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{N-x}$, on ſubſtitue ſucceſſivement à x tous les nombres entiers depuis o juſqu'à N, & ſi $N\frac{n}{m}$ eſt un nombre entier : non ſeulement la valeur acquiſe à cette quantité par la ſubſtitution de $N\frac{n}{m}$ à x eſt la plus grande poſſible; mais les valeurs acquiſes à la même quantité par la ſubſtitution de $N\frac{n}{m} \pm 1$ à x, ſont après celles-là les plus grandes poſſibles; les valeurs acquiſes à la même quantité par la ſubſtitution de $N \cdot \frac{n}{m} \pm 2$ à x ſont après ces dernieres les plus grandes poſſibles, ainſi de ſuite; de maniere que la probabilité d'avoir dans N épreuves le hazard ſpécifié, un nombre de fois approchant de $N\frac{n}{m}$ équivaut preſque à la certitude.

C L.

Pour rendre cette remarque ſenſible par des exemples : je ſuppoſe 1°. que $\frac{n}{m} = \frac{3}{5}$, & $N = 10$; la fonction $\frac{N \ldots\ldots \overline{N-x+1}}{1.2 \ldots\ldots x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{\,N-x}$ devient $\frac{10 \ldots\ldots \overline{11-x}}{1.2 \ldots\ldots x} \cdot \frac{3^x}{5^{10}} \cdot 2^{10-x}$; ſubſtituant ſucceſſivement à x dans cette derniere expreſſion, les nombres

$$\left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}\right\} \text{ ; elle devient } \left\{\begin{matrix} 204 + \frac{4}{5} \\ 3072 \\ 20736 \\ 82944 \\ 217728 \\ 391910 + \frac{2}{5} \\ 489888 \\ 419904 \\ 236196 \\ 78732 \\ 11809 + \frac{4}{5} \end{matrix}\right\} : 1953125 ;$$

or la probabilité d'avoir le hazard ſpécifié $N\frac{n}{m}$ ou $N\frac{n}{m} \pm 1$ ou $N\frac{n}{m} \pm 2$ fois, eſt

$$\left\{\begin{matrix} 217728 + \\ 391910 + \frac{2}{5} + \\ 489888 + \\ 419904 + \\ 236196 + \end{matrix}\right\} : 1953125 = \frac{1755626 + \frac{2}{5}}{1953125} ;$$

probabilité peu différente de la certitude.

2°. Je ſuppoſe que $\frac{n}{m} = \frac{3}{5}$ & que $N = 9$, l'expreſſion générale $\frac{N \ldots\ldots \overline{N-x+1}}{1.2 \ldots\ldots x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{\,N-x}$ devient $\frac{9 \ldots\ldots \overline{10-x}}{1.2 \ldots\ldots x} \cdot \frac{3^x}{5^9} \cdot 2^{9-x}$; ſubſtituant ſucceſ-

ſivement à x, dans cette derniere expreſſion, les nombres

$$\left\{\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\end{array}\right\}\text{; elle devient }\left\{\begin{array}{r}512\\6912\\41472\\145152\\326592\\489888\\489888\\314928\\118098\\19683\end{array}\right\}:1953125;$$

or la probabilité d'avoir le hazard ſpécifié un nombre de fois qui ne differe de $N\frac{n}{m}$ que d'une quantité moindre que 2, eſt

$$\left\{\begin{array}{r}326592+\\489888+\\489888+\\314928\end{array}\right\}:1653125=\frac{1621296}{1953125},$$

qui differe peu de l'unité ou de la certitude.

3°. Si $\frac{n}{m}=\frac{2}{3}$ & $N=10$; l'expreſſion générale devient $\frac{10\ldots\ldots\overline{11-x}}{1\,.\,2\ldots\ldots x}\cdot\frac{2^x}{3^{10}}$; dans laquelle ſubſtituant à x

$$\left\{\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\end{array}\right\}\text{; elle devient }\left\{\begin{array}{r}1\\20\\180\\960\\3360\\8064\\13440\\15360\\11520\\5120\\1024\end{array}\right\}:59049;$$

or la probabilité d'avoir en 10 épreuves le hazard ſpécifié, le nombre $N\frac{n}{m}$ de fois à 1 près, eſt

$$\left\{\begin{array}{c} 13440 + \\ 15360 + \\ 11520 + \end{array}\right\} : 59049 = \frac{40320}{59049}$$ qui differe peu de l'"unité : & la probabilité d'avoir ce hazard le nombre de fois $N\frac{n}{m}$ à 2 près, eſt

$$\left\{\begin{array}{c} 8064 + \\ 40320 + \\ 5120 \end{array}\right\} : 59049 = \frac{53504}{59049}$$ qui differe encore moins de l'unité.

4°. Si $\frac{n}{m} = \frac{1}{1000}$, & $N=2$; la probabilité d'amener dans les deux épreuves le hazard ſpécifié ; $\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right\}$ fois ; eſt $\left\{\begin{array}{r} 998001 \\ 1998 \\ 1 \end{array}\right\} : 1000000$; d'où l'on voit que la probabilité que le hazard n'arrivera pas du tout dans les deux épreuves, eſt $\frac{998001}{1000000}$, qui approche fort de la certitude ; parce que dans ce cas 0 eſt le nombre entier intermédiaire entre les fractions $\overline{N+1}\frac{n}{m}$, $\frac{3}{1000}$ & $\overline{N+1}.\frac{n}{m}-1$, $-\frac{997}{1000}$.

C L I.

COROLL. I. Si l'acte, mouvement ou état de choſes duquel dépend un hazard ſpécifié, eſt réitéré un certain nombre N de fois ; il eſt preſque certain que ce hazard arrivera un nombre de fois M, tel que la fraction $\frac{M}{N}$ approchera fort de la probabilité exacte $\frac{n}{m}$ de ce même hazard : car faiſant $\frac{M}{N} = \frac{n}{m}$; on en déduit $M = N \cdot \frac{n}{m}$.

C L I I.

COROLL. II. Si l'on ignore & qu'on ne puiſſe

trouver aucun moyen d'évaluer exactement la probabilité d'un hazard ſpécifié, on peut en conſéquence des principes ci-deſſus établis, avoir, d'après des expériences ou obſervations, preſque certainement cette probabilité approchée. Pour y parvenir, on réitérera ou l'on obſervera le plus grand nombre de fois qu'il ſera poſſible ou commode, l'acte, mouvement ou état de choſes duquel ce hazard dépend : & nommant N le nombre de ces expériences ou obſervations, M le nombre de fois que ce hazard ſera arrivé; on prendra la fraction $\frac{M}{N}$ pour la probabilité cherchée.

Par exemple. Si Pierre ayant joué 300 parties d'échecs contre Paul, en a gagné 136; je pourrai prendre $\frac{136}{306}$ ou $\frac{34}{75}$ pour la probabilité que Pierre gagnera la premiere partie d'échecs qu'il jouera contre Paul; & je ſerai preſque aſſuré que cette probabilité ne ſera pas conſidérablement éloignée de la véritable.

CLIII.

L'USAGE de cette méthode exige deux précautions eſſentielles dont l'une regarde le nombre, l'autre la qualité des expériences ou obſervations deſquelles on veut déduire la probabilité qu'il importe de connoître.

CLIV.

1°. SI LE nombre de ces expériences eſt très-petit, & qu'aucune n'ait donné le hazard dont on cherche la probabilité; non-ſeulement on ne peut en conclure rigoureuſement que ce hazard eſt impoſſible; mais on n'eſt pas même aſſuré qu'il n'ait un certain degré de probabilité. Si au contraire, ce hazard eſt arrivé à toutes les épreuves; loin d'en

pouvoir conclure à la rigueur que le hazard doit nécessairement arriver, on n'est pas même assuré que sa probabilité soit bien grande.

Mais si le nombre des expériences est très-grand, on pourra conclure avec beaucoup de vraisemblance; dans le premier cas, que le hazard dont il s'agit est sinon absolument impossible, du moins très-peu probable; & dans le 2e. cas, que ce hazard est sinon rigoureusement certain, du moins d'une très-grande probabilité.

C L V.

Il ne doit y avoir dans les divers mouvements, actes ou états de choses comparés, aucune différence connue & sensible avec celui duquel dépend le hazard dont on cherche la probabilité, qui puisse faire présumer un événement plus qu'un autre :

Par exemple : Si je veux par la méthode dont il s'agit, chercher la probabilité d'amener sonnet avec deux dés à jouer ordinaires que j'ai en main ; je ferai les expériences nécessaires avec ces mêmes dés, ou avec des dés qui n'auront avec ceux-là aucune différence connue ; tels que seroient des dés pipés, ou que je saurois être conformés de maniere à devoir amener plus souvent tel point qu'un autre de même probabilité.

De même si sur 3000 octogénaires que j'ai connus, 60 seulement sont parvenus à l'âge de 100 ans ; en suivant la méthode actuelle, je pourrai prendre $\frac{60}{3000}$ ou $\frac{1}{50}$ pour la probabilité qu'un octogénaire inconnu vivra jusqu'à 100 ans ; mais si je cherche la probabilité que Pierre qui a 80 ans, vivra jusqu'à 100, sachant d'ailleurs que Pierre est infirme & attaqué d'une maladie dangereuse ; je rejetterai de mes observations, celles qui ont été faites sur des octogénaires sains & robustes, bor-

nant mon calcul à celles qui auront été faites sur des vieillards du même âge, & à-peu-prés dans la position connue de Pierre; par quoi la probabilité que Pierre vivra jusqu'à 100 ans, deviendra peut-être nulle ou presque nulle.

CLVI.

Il suit des deux propositions précédentes, que la méthode dont il s'agit, donnera d'autant plus d'espérance d'approcher de la véritable probabilité qu'on desire de connoître, que les observations ou expériences dont on l'aura déduit, auront été plus multipliées; & qu'elles auront été faites sur des actes, mouvements, ou états de choses plus semblables à celui duquel dépend le hazard dont on cherche la probabilité.

CLVII.

Si dans le cours des expériences desquelles on veut déduire la probabilité d'un hazard, on avoit remarqué que la fréquence des retours de ce hazard eût augmenté ou diminué progressivement: il faudroit supposer à cette variation successive une cause dont il conviendroit de faire état autant qu'il seroit possible dans l'évaluation de la probabilité; ce qui se feroit à-peu-près de cette maniere: partager les expériences faites en plusieurs époques consécutives, contenantes chacune le même nombre d'expériences; supposer que la cause de la variation observée, n'agit point dans le cours des époques, mais seulement dans le passage d'une époque à l'autre; prendre suivant la méthode actuelle la probabilité du hazard dans chaque époque: ces probabilités formeront entre elles une suite de fractions qui auront le même dénominateur, & dont les numérateurs formeront une suite de nombres qui sera ré-

guliere ou irréguliere : si cette suite est irréguliere, pour la rendre réguliere, on y fera les changements nécessaires, mais les plus légers possibles ; cette suite étant rendue réguliere par cette voie, on l'augmentera d'un terme ; on prendra ce terme pour numérateur, & le dénominateur commun pour dénominateur ; & la fraction ainsi formée pourra être prise avec quelque espérance d'une approximation raisonnable pour la probabilité cherchée.

Par exemple : Pierre ayant joué contre Paul 408 parties de trictrac pendant lesquelles ils se sont inégalement perfectionnés dans la science du jeu ; il est arrivé que dans les 68 premieres parties, Pierre n'en a gagné que 12 ; dans les 68 suivantes 15, dans les 68 suivantes 19 ; dans les 68 suivantes 26 ; dans les 68 suivantes, 24, & enfin dans les 68 dernieres 31 ; la probabilité que Pierre avoit de gagner étoit, dans la 1re. époque $\frac{12}{68}$; dans la 2e. $\frac{15}{68}$; dans la 3e. $\frac{19}{68}$; dans la 4e. $\frac{26}{68}$; dans la 5e. $\frac{24}{68}$; & enfin dans la 6e. $\frac{31}{68}$.

Dans la suite 12, 15, 19, 26, 24, 31, des numérateurs je substitue les termes 24 & 28, aux termes 26 & 24, & elle devient 12, 15, 19, 24, 28, 31 qui est une suite réguliere, les différences des termes formant entre elles la suite 3, 4, 5, 4, 3 : je prendrai pour les 7e. 8e. 9e. 10e. termes &c. les nombres 33, 34, 34, 33, &c. j'aurai une suite réguliere où les différences des termes formeront la suite 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0, —1, &c. & je prendrai $\frac{33}{68}$, $\frac{34}{68}$, $\frac{34}{68}$ pour les probabilités que Pierre gagnera dans les 7e. 8e. & 9e. époques.

LA

CLVIII.

La voie des expériences & obſervations peut être employée pour trouver les probabilités des hazards de toute eſpece, même de ceux dont la probabilité pourroit s'évaluer exactement par l'analyſe : il arrivera ſans doute très-ſouvent, que la probabilité ainſi trouvée différera beaucoup de la probabilité exacte donnée par l'analyſe : mais il faut conſidérer que dans les calculs, les inſtruments du hazard ſont ſuppoſés parfaits, c'eſt-à-dire, également capables de produire toutes les chances dont on fait l'énumération; ce qui ne peut avoir lieu dans la pratique, où l'imperfection des inſtruments influe d'ordinaire beaucoup ſur l'événement. Or par la méthode actuelle, les imperfections des inſtruments du hazard ayant influé de fait ſur les réſultats obſervés; les obſervations deſquelles on déduit les probabilités évaluent raiſonnablement ces imperfections dans le calcul; de ſorte qu'il n'eſt pas impoſſible & qu'on peut quelquefois préſumer avec fondement, que la probabilité évaluée par la voie des expériences approche davantage de la probabilité cherchée que celle qu'on auroit évaluée par une analyſe exacte.

Pour rendre ceci ſenſible par un exemple, je ſuppoſe que deux dés à jouer ordinaires ſont parfaitement cubiques, & de matiere également denſe dans toute l'étendue de leur ſolidité; ſi ces deux dés ſont jettés au hazard ſur une table horiſontale, il eſt certain dans la théorie qu'il y a 36 réſultats également poſſibles. Mais s'il ſe trouve dans ces dés quelque irrégularité phyſique; par exemple, ſi l'un de ces dés eſt de matiere plus denſe & par conſéquent plus peſante vers une face que vers les 5 autres; ce dé (toutes choſes d'ailleurs égales) doit

tomber plus souvent sur cette face que sur les autres; & par conséquent doit amener plus souvent le point opposé à cette face, qu'aucun des cinq autres points; la méthode analytique devient donc fautive alors, & l'on peut lui préférer la méthode des expériences.

Pour y parvenir, je jetterai ces deux dés sur la table un nombre de fois suffisant, par exemple 144 fois; & si dans le cours de ces 144 épreuves le point sonnet arrive 12 fois, & le point 5 & 4 seulement 6 fois; je prendrai $\frac{12}{144}$ ou $\frac{1}{12}$ pour la probabilité d'amener sonnet avec ces dés, & $\frac{6}{144}$ ou $\frac{1}{24}$ pour la probabilité d'amener 5 & 4; & j'approcherai peut être davantage de la véritable valeur de ces probabilités que si je les évaluois à $\frac{1}{36}$ & $\frac{1}{18}$; parce qu'il est très-présumable que dans un grand nombre d'épreuves, la fréquence des retours de chaque hazard possible, est à-peu-près proportionnelle avec la probabilité réelle de ce hazard.

C'est d'après cette maniere d'évaluer les probabilités qu'il arrive si fréquemment aux joueurs malheureux de changer de dés, de cartes, de coupes, de places, & d'employer avec succès divers autres moyens de changer les instruments du hazard, lorsque l'expérience leur a fait connoître le désavantage qui résulte pour eux de l'imperfection de ces instruments.

CLIX.

ON PEUT trouver, par la voie des expériences, la probabilité approchée des divers événements qui peuvent avoir lieu, non-seulement dans les jeux appellés proprement jeux de hazard, mais aussi dans les jeux mixtes où le hazard & le bien

joué combinés peuvent concourir plus ou moins à déterminer l'événement ; tels que le trictrac, le billard, la paume, la plupart des jeux de cartes appellés jeux de société ; & enfin dans les jeux où le bien joué seul décide, tels que les échecs & autres.

CLX.

On peut aussi par cette méthode, au moyen d'un nombre suffisant d'expériences ou d'observations bien choisies, trouver la probabilité des divers événements physiques dont les causes occasionelles sont inconnues & qui ne sont pas assujettis à des retours périodiques connus qui en rendent l'événement certain.

CLXI.

Exemples. Pour trouver la probabilité qu'un homme actuellement âgé d'un nombre n d'années, vivra jusques à un nombre d'années exprimé par $n + p$; sur les regiftres mortuaires de la Ville, & s'il est possible, de la province qu'habite cet homme, je prends le nombre des personnes mortes après l'âge de n années, je fais de ce nombre le dénominateur de la probabilité cherchée ; je prends ensuite le nombre d'entre ces personnes qui sont mortes après l'âge de $n + p$ années, & je fais de ce nombre le numérateur de cette même probabilité.

Par ce moyen : dans un pays où les regiftres mortuaires datent d'un peu loin & sont rédigés avec exactitude, on peut toujours trouver la probabilité, qu'une personne dont l'âge est connu vivra 1, 2, 3, ou un plus grand nombre d'années de plus ; & à quel âge on peut parier équitablement à mises égales, que cette personne parviendra. D'après une suite d'observations semblables ; on pourra dref-

ser pour chaque lieu des tables des probabilités de la vie humaine pour tous les âges, telles que celles qui se trouvent dans les œuvres de M. de Buffon.

De même, il est hors de doute que par une suite assez longue d'observations météorologiques, on ne puisse trouver pour chaque pays & chaque saison les probabilités des diverses températures de l'air auxquelles on peut s'attendre, & peut-être reconnoître enfin, après un grand nombre d'années, dans ces vicissitudes, des loix uniformes & des retours périodiques au moyen desquels on pourroit fixer l'ordre de ces révolutions & les prévoir avec certitude.

CLXII.

On peut encore, par cette méthode des observations & expériences, déterminer à-peu-près la probabilité des effets moraux résultants de la combinaison des volontés, & par conséquent des jugements & des intérêts humains dans des circonstances données, soit qu'il s'agisse de conjecturer le résultat des qualités connues d'un homme en particulier, ou des qualités connues de plusieurs hommes réunis ou divisés sur un même objet.

CLXIII.

Si je voulois, par exemple, évaluer la probabilité du témoignage rendu par un homme dans une circonstance donnée; je comparerois ensemble tous les témoignages vérifiés rendus par ce même homme, ou par d'autres ayant les mêmes intérêts & les mêmes lumieres à-peu-près, & dans des circonstances à-peu-près semblables; je prendrois le nombre des témoignages comparés pour le dénominateur, & le nombre de ces témoignages reconnus véritables pour le numérateur de la probabilité cherchée.

CLXIV.

Et comme en ſuivant cette méthode, ni la probabilité, ni la certitude ne peuvent s'évaluer avec une exactitude géométrique, mais ſeulement avec la forte eſpérance d'une approximation raiſonnable ; pour la diſtinguer de la probabilité & de la certitude géométriques, on les nomme *phyſiques*, lorſqu'il eſt queſtion d'événements naturels à la détermination deſquels la volonté humaine n'a aucunement participé ; & *morales*, lorſqu'il eſt queſtion d'événements réſultants des actes de la volonté des hommes.

CLXV.

Enfin les obſervations & expériences peuvent ſervir à trouver la probabilité des aſſertions ou propoſitions générales & particulieres, ainſi que des opinions & ſyſtêmes, par la comparaiſon des faits qui ſemblent les confirmer avec ceux qui paroiſſent y contredire : & l'on ne doit pas déſeſpérer qu'au défaut des certitudes qui peut-être ne ſeront jamais données aux hommes, un nombre ſuffiſant d'expériences & d'obſervations joint à l'uſage judicieux que le génie en ſaura faire, ne puiſſent aſſujettir un jour la plupart des objets douteux des connoiſſances humaines, à une critique univerſelle & un genre de preuves unique, qui fixeroit ſur chaque opinion un degré d'aſſentiment uniforme, proportionné au degré de probabilité qui lui auroit été aſſigné.



CHAPITRE VII.

De l'influence des Témoignages sur les Probabilités.

§. CLXVI.

IL EST une troisieme maniere d'évaluer la probabilité des faits ou des propositions, laquelle est fort en usage dans le commerce ordinaire de la vie : c'est de les déduire de la valeur des témoignages par lesquels ces faits sont affirmés ou niés. Or la force des témoignages tient non-seulement au nombre des témoins, mais à l'intégrité & aux lumieres de chacun d'eux : de maniere que la quantité ou valeur de ces qualités morales doit d'abord être exprimée dans le calcul, si l'on veut apprécier avec quelque justesse le degré de probabilité résultant d'un concours de témoignages. Nous allons essayer d'assigner briévement quelques-uns des principes qui nous ont semblé pouvoir servir de base à cette théorie, que nous n'oserions garantir de toutes objections, & dont l'application peut paroître délicate.

CLXVII.

L'EXPÉRIENCE peut seule nous mettre à portée d'apprécier l'intensité de lumieres & de droiture d'un témoin qui atteste un fait ou qui le nie ; en conséquence la probabilité de la véracité d'un témoignage rendu en une circonstance donnée, ne peut guere se déduire que de la comparaison faite d'un grand

nombre de témoignages rendus par le même témoin, ou par d'autres ayant à-peu-près les mêmes passions, préjugés, habitudes, intérêts & lumieres; & dans des circonstances à-peu-près semblables, ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus (CLXIII.). Je suppose donc qu'en un nombre a de ces observations, le témoignage a été reconnu pour véritable un nombre de fois b, & qu'il a été reconnu pour faux dans toutes les autres; on pourra exprimer par $\frac{b}{a}$ la valeur du témoignage, c'est-à-dire, la probabilité qu'il est véritable.

CLXVIII.

On appelle *Poids*, ou *Valeur*, ou *Force* d'un témoignage, la quantité de son influence dans la probabilité du fait qu'il affirme; de même, le poids de plusieurs témoignages réunis est l'influence résultante de cette réunion dans la probabilité du fait affirmé par tous ces témoignages.

CLXIX.

Le poids d'un témoignage qui affirme un fait est proportionnel à la probabilité de ce témoignage, & peut toujours être exprimé par cette probabilité. Ainsi si la fraction $\frac{b}{a}$ est la probabilité du témoignage, $\frac{b}{a}$ exprimera le poids de ce même témoignage.

CLXX.

On nomme *irréprochable*, le témoignage dont le poids est le plus grand possible; c'est-à-dire, celui dont la probabilité est 1; on peut aussi le définir, celui qui est le plus capable de rendre certain le fait qu'il affirme, en supposant que ce fait ne soit pas reconnu d'ailleurs pour impossible, & que ce té-

CHAPITRE VII.

De l'influence des Témoignages sur les Probabilités.

§. CLXVI.

Il est une troisieme maniere d'évaluer la probabilité des faits ou des propositions, laquelle est fort en usage dans le commerce ordinaire de la vie : c'est de les déduire de la valeur des témoignages par lesquels ces faits sont affirmés ou niés. Or la force des témoignages tient non-seulement au nombre des témoins, mais à l'intégrité & aux lumieres de chacun d'eux : de maniere que la quantité ou valeur de ces qualités morales doit d'abord être exprimée dans le calcul, si l'on veut apprécier avec quelque justesse le degré de probabilité résultant d'un concours de témoignages. Nous allons essayer d'assigner briévement quelques-uns des principes qui nous ont semblé pouvoir servir de base à cette théorie, que nous n'oserions garantir de toutes objections, & dont l'application peut paroître délicate.

CLXVII.

L'expérience peut seule nous mettre à portée d'apprécier l'intensité de lumieres & de droiture d'un témoin qui atteste un fait ou qui le nie ; en conséquence la probabilité de la véracité d'un témoi[illegible]ge rendu en une circonstance d[illegible] se déduire que de la co[illegible]

poids de tous les témoignages réunis sera, $A + (1 - A) \cdot \frac{q}{p}$.

CLXXIII.

De même quand plusieurs témoignages nient un fait, chacun de ces témoignages ajoute au poids des autres réunis dans la probabilité que ce fait n'existe pas, la partie de ce qui manque à ce poids pour valoir l'unité exprimée par le poids de ce témoignage; ainsi si B est le poids de tous les autres témoignages niants, & $\frac{y}{x}$ le poids du dernier témoignage; le poids de tous les témoignages réunis dans la probabilité que le fait n'existe pas, est $B + (1 - B) \cdot \frac{y}{x}$.

CLXXIV.

Si l'un des témoignages affirmants est irréprochable, les autres ne peuvent rien ajouter à son poids, qui est le plus grand qu'un nombre quelconque de témoignages réunis puisse avoir; de même si l'un des témoignages est irréprochable, les autres témoignages niants ne peuvent rien ajouter à son poids, dans la probabilité que le fait nié n'existe pas, parce que ce poids est le plus grand possible.

CLXXV.

Par la même raison, si l'un des témoignages affirmants n'est d'aucun poids; c'est-à-dire, si sa probabilité est égale à 0; il n'ajoutera rien au poids des témoignages affirmants; & un des témoignages niants dont le poids seroit nul, n'ajouteroit rien au poids des autres témoignages niants.

CLXXVI.

Lorsque plusieurs témoignages affirment un

fait, & que plusieurs autres témoignages nient le même fait, le poids résultant de la réunion de ces témoignages contradictoires, est l'excès du poids des témoignages affirmants sur le poids des témoignages niants ; ou bien l'excès du poids des témoignages niants sur celui des témoignages affirmants ; ainsi nommant A le poids des témoignages affirmants, B le poids des témoignages niants ; le poids résultant de tous ces témoignages de part & d'autre est $A-B$, ou $B-A$, ou o selon que $A>B$ ou que $A<B$ ou que $A=B$.

CLXXVII.

Si le poids des témoignages qui affirment un fait est plus grand que le poids des témoignages qui nient ce même fait ; l'excès du premier poids sur le second, ou ce qui est de même, le poids résultant de tous les témoignages pour & contre, augmente la probabilité de l'existence du fait : si au contraire le poids des témoignages niants l'emporte sur le poids des témoignages affirmants ; le poids résultant des témoignages pour & contre augmente la probabilité de la non-existence du fait attesté : enfin si le poids des témoignages affirmants est égal au poids des témoignages niants, le fait est réduit à sa probabilité propre ; c'est-à-dire, à celle qui peut lui être assignée indépendamment des témoignages.

CLXXVIII.

Lorsqu'un fait attesté a un degré de probabilité qui lui a été assigné par l'analyse ou l'expérience, indépendamment des témoignages, les témoignages rendus pour ou contre ce fait ajoutent à sa probabilité propre la partie de ce qui lui manque pour valoir la certitude, exprimée par l'excès du

poids des témoignages affirmants sur le poids des témoignages qui le nient.

CLXXIX.

Théorême I. Si plusieurs témoignages dont les probabilités sont $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{g}{f}$, $\frac{i}{h}$, &c. affirment un fait : le poids de ces témoignages réunis est l'unité moins le produit des quantités $1-\frac{b}{a}$, $1-\frac{d}{c}$, $1-\frac{g}{f}$, $1-\frac{i}{h}$, &c. c'est-à-dire, $1-(1-\frac{b}{a}).(1-\frac{d}{c}).(1-\frac{g}{f}).(1-\frac{i}{h})\ldots\ldots$

Dém. Le poids du premier témoignage est $\frac{b}{a}$. (CLXIX.) $=1-(1-\frac{b}{a})$.

Le poids des deux premiers témoignages est $\frac{b}{a}+(1-\frac{b}{a}).\frac{d}{c}$ (CLXXI.) $=1-(1-\frac{b}{a})+(1-\frac{b}{a}).\frac{d}{c}=1-(1-\frac{b}{a}).(1-\frac{d}{c})$.

Le poids des trois premiers témoignages est $\frac{b}{a}+[1-\frac{b}{a}]\frac{d}{c}+\{1-\frac{b}{a}-[1-\frac{b}{a}].\frac{d}{c}\}.\frac{g}{f}$ (CLXXII.) $=1-[1-\frac{b}{a}].[1-\frac{d}{c}].[1-\frac{g}{f}]$; ainsi de suite : donc, &c. *C. Q. F. D.*

CLXXX.

Coroll. I. Si plusieurs témoignages dont les probabilités sont $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{r}$, $\frac{u}{t}$, &c. nient un fait; le poids de ces témoignages réunis dans la probabilité de la non-existence du fait est $1-(1-\frac{q}{p}).(1-\frac{s}{r}).(1-\frac{u}{t})\ldots\ldots$

CLXXXI.

Coroll. II. Si plusieurs témoignages dont les

probabilités sont $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{g}{f}$, &c. affirment un fait, & que plusieurs autres témoignages dont les probabilités sont $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{r}$, $\frac{u}{t}$, &c. nient ce même fait : nommant A le produit $(1-\frac{b}{a})\cdot(1-\frac{d}{c})\cdot(1-\frac{g}{f})\ldots$, & B, le produit $(1-\frac{q}{p})\cdot(1-\frac{s}{r})\cdot(1-\frac{u}{t})\ldots$: Le poids de ces témoignages contradictoires sera $1-A-1+B$, ou $B-A$, si $B>A$; & ce poids augmentera la probabilité propre du fait : Au contraire, le poids de ces témoignages sera $1-B-1+A$, ou $A-B$, si $B<A$, & ce poids augmentera la probabilité de la non-existence du fait : enfin si $A=B$, le poids des témoignages sera nul, & ne pourra augmenter ni diminuer la probabilité propre du fait. (CLXXVI.).

CLXXXII.

Remarque. On voit par les formules trouvées aux trois propositions précédentes ; 1°. que la fraction représentée par $\left\{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right.$ est d'autant plus petite & par conséquent le poids des témoignages $\left\{\begin{matrix}\text{affirmants}\\\text{niants}\end{matrix}\right.$ d'autant plus grand que les témoignages particuliers $\left\{\begin{matrix}\text{affirmants}\\\text{niants}\end{matrix}\right.$ ont plus de probabilité ou de poids & sont en plus grand nombre ; 2°. que si quelqu'un de ces témoignages est de nulle valeur, c'est-à-dire, si son poids est égal à o, il n'ajoute & n'ôte rien aux poids des autres ; 3°. que si entre les témoignages affirmants, un ou plusieurs sont irréprochables, on a $A=0$, & le poids des témoignages dans la probabilité de l'existence du fait sera B ; 4°. que si entre les témoignages niants, un ou plusieurs sont irréprochables, on a $B=0$, & le poids des té-

moignages dans la probabilité de la non-existence du fait sera A. 5°. Enfin, que si un ou plusieurs d'entre les témoignages affirmants sont irréprochables, & que un ou plusieurs des témoignages niants le soient aussi; on a $A=B=0$; & le fait attesté se trouve réduit à sa probabilité propre; c'est-à-dire, à celle qui peut lui être assignée indépendamment des témoignages.

CLXXXIII.

Lorsqu'on a assigné à un fait un degré de probabilité fondé sur l'analyse ou les expériences & indépendant des témoignages; les témoignages qui affirment ce fait, ou l'excès du poids de ceux qui l'affirment sur le poids de ceux qui le nient, augmentent sa probabilité propre d'une partie de ce qui lui manque pour valoir l'unité; & cette partie augmentée est proportionnelle non-seulement au poids des témoignages, ainsi qu'il a déja été observé (CLXXVIII.), mais aussi au degré de probabilité propre de ce fait. Ce principe tient à la différence d'assentiment que nous donnons naturellement au même témoin, qui est toujours proportionnelle à la probabilité ou vraisemblance que nous avons assignés par nous-mêmes au fait attesté. En effet je croirois beaucoup plus à celui qui viendroit m'annoncer, que dans 30 jets de deux dés à jouer il n'a amené qu'une fois sonnet, que je ne croirois au même homme s'il m'annonçoit, que dans cent jets de ces deux dés il a amené sonnet à tous coups, & le degré de persuasion restant au témoignage seroit en proportion du degré de probabilité du fait affirmé.

CLXXXIV.

Il suit de ce principe que le degré de proba-

bilité ajouté par des témoignages à la probabilité propre d'un fait est en raison composée 1°. de la différence de l'unité à la probabilité propre du fait attesté ; 2°. du poids des témoignages qui affirment le fait, ou de l'excès du poids de ceux qui l'affirment sur le poids de ceux qui le nient ; 3°. de la probabilité propre du fait.

CLXXXV.

Théorème II. Nommant $\frac{n}{m}$ la probabilité propre d'un fait, & P l'excès des poids des témoignages qui l'affirment sur le poids de ceux qui le nient : je dis que la probabilité du fait devient par ces témoignages égale à $1 - (1 - \frac{n}{m}) \cdot (1 - \frac{n}{m} P)$.

Démonst. Suivant la proposition précédente, les témoignages ajoutent à la probabilité propre du fait le degré de probabilité exprimé par $(1 - \frac{n}{m}) \cdot P \cdot \frac{n}{m}$; donc la probabilité de ce fait après les témoignages, est $\frac{n}{m} + (1 - \frac{n}{m}) \cdot P \cdot \frac{n}{m} = 1 - (1 - \frac{n}{m}) \cdot (1 - \frac{n}{m} \cdot P)$. *C. Q. F. D.*

CLXXXVI.

Si le poids des témoignages est nul, c'est-à-dire, si $P = 0$; la formule ci-dessus devient $1 - (1 - \frac{n}{m})$ ou $\frac{n}{m}$; ou ce qui est de même, le fait est réduit à sa probabilité propre : si au contraire $P = 1$, la probabilité du fait deviendra $1 - (1 - \frac{n}{m})^2$; d'où il suit qu'un nombre quelconque de témoignages même irréprochables ne suffisent pas pour rendre absolument certain un fait qui ne l'est pas par lui-même, & indépendamment des témoignages.

CLXXXVII.

Si le fait eſt certain par lui-même, c'eſt-à-dire, ſi ſa probabilité propre $\frac{n}{m} = 1$: la formule ci-deſſus ſe réduit à 1, quelle que ſoit la valeur de P: ſi au contraire $\frac{n}{m} = 0$, cette formule ſe réduit à 0, quelle que ſoit la valeur de P; d'où il ſuit qu'un nombre quelconque de témoignages même irréprochables ne peut donner la plus légere probabilité à un fait qui par lui-même eſt reconnu pour impoſſible.

CLXXXVIII.

Théorême III. Nommant toujours $\frac{n}{m}$ la probabilité propre d'un fait, & Q l'excès du poids des témoignages qui nient ce fait ſur le poids des témoignages qui l'affirment; je dis que la probabilité du fait devient, après ces témoignages, $1 - (1 - \frac{n}{m}) \cdot (1 + \frac{n}{m} \cdot Q)$.

Démonst. Suivant la propoſition (CLXXXIV.) les témoignages ajoutent à la probabilité $1 - \frac{n}{m}$ de la non-exiſtence du fait, le degré de probabilité exprimé par $\frac{n}{m} \cdot Q \cdot (1 - \frac{n}{m}$;) donc la probabilité de la non-exiſtence du fait devient, après les témoignages, $[1 - \frac{n}{m}] + \frac{n}{m} \cdot Q \cdot [1 - \frac{n}{m}] = [1 - \frac{n}{m}] \cdot [1 + \frac{n}{m} Q]$; & par conſéquent la probabilité du fait devient $1 - [1 - \frac{n}{m}] \cdot [1 + \frac{n}{m} Q]$; *C. Q. F. D.*

CLXXXIX.

Si le poids des témoignages eſt nul, c'eſt-à-dire, ſi $Q = 0$, la formule ci-deſſus ſe réduira à $\frac{n}{m}$, &

le fait sera réduit à sa probabilité propre; si $Q=1$, cette formule deviendra $1-\left[1-\frac{n}{m}\right].\left[1+\frac{n}{m}\right]$ $=1-1+\frac{n^2}{m^2}=\frac{n^2}{m^2}$; d'où il suit qu'un nombre quelconque de témoignages même irréprochables ne peut anéantir entiérement la probabilité propre d'un fait qui n'est pas absolument impossible.

C X C.

Si $\frac{n}{m}=0$; cette formule deviendra 0; Si $\frac{n}{m}=1$, elle devient 1, d'où il suit qu'un nombre quelconque de témoignages qui nient un fait, fussent-ils irréprochables, ne peut diminuer la certitude acquise à ce fait par l'analyse ou l'expérience.

C X C I.

Nommant toujours $\frac{n}{m}$ la probabilité d'un fait indépendante des témoignages; de plus représentant par $1-A$ le poids des témoignages qui affirment ce fait, & par $1-B$ le poids des témoignages qui le nient; la probabilité du fait après les témoignages tels qu'ils soient, sera toujours $1-\left[1-\frac{n}{m}\right].\left[1-\frac{n}{m}.\overline{A-B}\right]$; car $B-A$ sera l'excès du poids des témoignages affirmants sur le poids des témoignages niants; & $A-B$ sera l'excès du poids des témoignages niants sur celui des témoignages affirmants: substituant donc $B-A$ à P dans la formule $1-\left[1-\frac{n}{m}\right].\left[1-\frac{n}{m}.P\right]$ trouvée par le théorême 2e, cette formule devient $1-\left[1-\frac{n}{m}\right].\left[1-\frac{n}{m}.\overline{B-A}\right]$.

De même, substituant $A-B$ à Q dans la formule

$1-\left[1-\frac{n}{m}\right]\cdot\left[1+\frac{n}{m}\cdot Q\right]$ du théorême 3ᵉ. cette formule devient encore $1-\left[1-\frac{n}{m}\right]\cdot\left[1+\frac{n}{m}\cdot\overline{A-B}\right]$ qui eſt égale à $1-\left[1-\frac{n}{m}\right]\cdot\left[1-\frac{n}{m}\cdot\overline{B-A}\right]$.

CXCII.

Il ſuit des propoſitions (CLXXXVI. & CLXXXIX.), que la fraction $\frac{n}{m}\cdot\left[1-\frac{n}{m}\right]$ eſt en même temps la plus grande augmentation poſſible que les témoignages qui affirment un fait puiſſent ajouter à la probabilité propre $\frac{n}{m}$ de ce fait, & la plus grande diminution que cette même probabilité puiſſe ſouffrir des témoignages qui le nient; car nommant x la plus grande augmentation poſſible de cette probabilité, on a $\frac{n}{m}+x=1-\left[1-\frac{n}{m}\right]^2=1-1+2\frac{n}{m}-\frac{n^2}{m^2}$, d'où l'on tire $x=\frac{n}{m}-\frac{n^2}{m^2}=\frac{n}{m}\cdot\left[1-\frac{n}{m}\right]$.

De même nommant y la plus grande diminution poſſible de cette même probabilité, on a $\frac{n}{m}-y=\frac{n^2}{m^2}$; donc $y=\frac{n}{m}-\frac{n^2}{m^2}=\frac{n}{m}\cdot\left[1-\frac{n}{m}\right]$.

CXCIII.

Les 2 propoſitions qui viennent d'être citées, font connoître que tous les témoignages poſſibles pour ou contre un fait ſont inſuffiſants pour établir à ce fait une probabilité exacte, lorſqu'on n'a d'ailleurs aucune voie d'analyſe ni d'expériences pour donner à ce fait un degré de probabilité qui lui ſoit propre: ce qui eſt évident; puiſque des témoigna-

ges même irréprochables ne suffisent, ni pour rendre entiérement certain un fait même très-probable; ni pour établir l'impossibilité absolue d'un fait qui n'a qu'une très-petite probabilité.

CXCIV.

Il suit delà, qu'en supposant qu'on ne puisse assigner à un fait un degré de probabilité qui lui soit propre, on tomberoit dans l'erreur de prendre pour probabilité de ce fait, ou le poids des témoignages qui l'affirment, ou l'excès du poids de ceux qui l'affirment sur le poids de ceux qui le nient : un seul exemple suffira pour s'en convaincre. Je suppose qu'un fait de cette espece est affirmé par des témoignages dont le poids est $\frac{2}{3}$ & nié par des témoignages dont le poids est $\frac{1}{3}$; si l'on prenoit $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3}$ pour la probabilité du fait; $1 - \frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ feroit la probabilité que le fait n'existe pas; par quoi les probabilités des faits contradictoires affirmés se trouveroient en raison inverse des poids des témoignages qui les affirment : ce qui est manifestement absurde : cette remarque fait connoître sensiblement l'insuffisance des autorités pour fonder des conjectures sur des faits, dont la raison, ni l'expérience ne donnent aucun moyen d'examiner la nature, & dont nous ne sommes pas en état d'apprécier la probabilité indépendamment de ces autorités.

CXCV.

L'influence qui vient d'être assignée aux témoignages sur la probabilité des faits attestés, suppose que le témoin prétend avoir vérifié par lui-

même, & tenir pour certain le fait qu'il affirme; mais si ce fait n'est que probable pour celui qui me l'annonce; comme dans le cas où il l'auroit lui-même appris d'un autre témoin; alors la probabilité que le témoignage donne au fait attesté est composée de la probabilité du témoignage qui me l'annonce & de celle du témoignage antérieur qui a donné lieu à celui-là. Supposant donc que $\frac{n}{m}$ est la probabilité propre du fait; $\frac{b}{a}$ le poids du témoignage qui me l'annonce; $\frac{d}{e}$ le poids du témoignage antérieur qui a donné lieu à celui-là; la probabilité du fait deviendra, par ces témoignages, $\frac{n}{m} + \left[1 - \frac{n}{m}\right] \cdot \frac{n}{m} \quad \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{e}$;

Et si le témoin antérieur, au lieu de donner son témoignage comme directement certifié, l'a reçu lui-même d'un troisieme témoin dont le poids est $\frac{g}{f}$; la probabilité du fait deviendra $\frac{n}{m} + \left[1 - \frac{n}{m}\right] \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{g}{f}$; Ainsi de suite.

CXCVI.

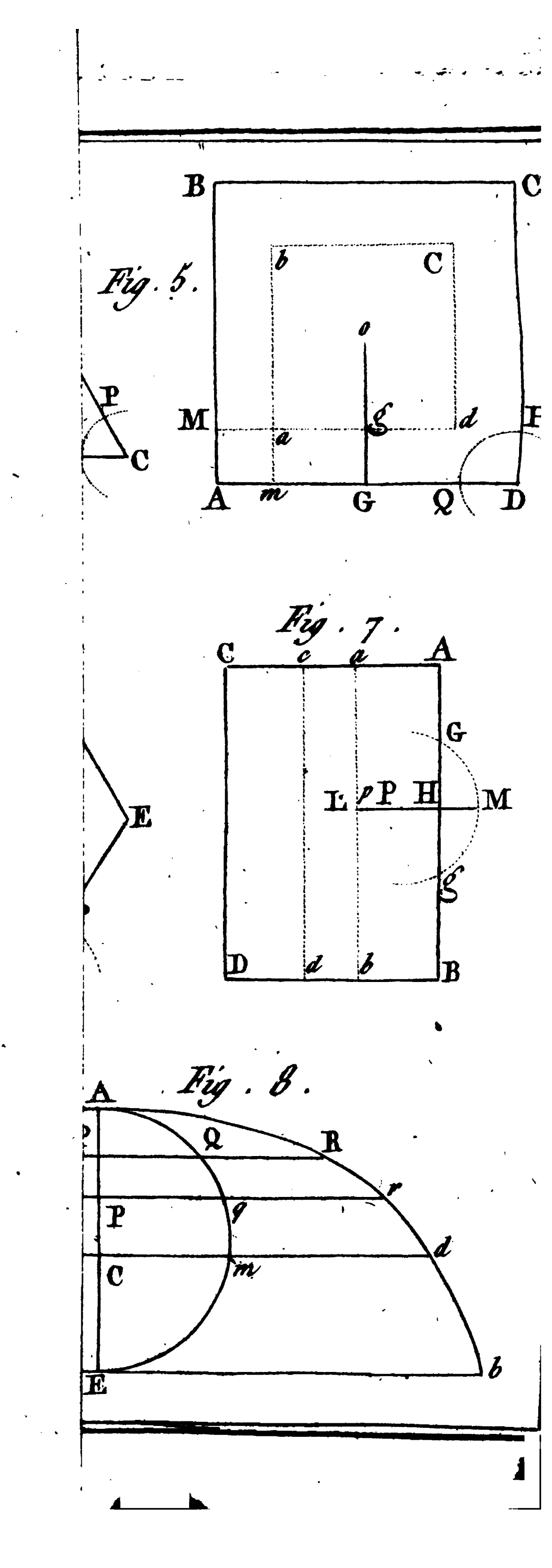
Un témoignage rendu en conséquence d'un autre témoignage que j'ai reçu moi-même directement n'ajoute rien pour moi au poids de ce témoignage que j'ai reçu; ainsi lorsqu'un fait m'a été affirmé par Pierre; Paul qui a reçu le même témoignage de Pierre, n'ajoute rien en me le rapportant à l'influence du témoignage de Pierre sur la probabilité que j'ai du fait.

CXCVII.

Un témoignage authentiquement consigné dans un écrit, conserve la probabilité qu'il avoit dans

l'origine lorsqu'il a été oralement rendu par le témoin ; & il la conserve autant de temps que l'authenticité de l'écrit reste certaine ; mais lorsque cette authenticité n'est plus que probable, le poids du témoignage, pour être évalué juste, doit se multiplier par la probabilité de l'authenticité de l'écrit dans lequel il est consigné.

FIN.


Fig. 5.
B
C
b
C
o
P
M
g
d
a
C
A
m
G
Q
D
Fig. 7.
C
c
a
A
G
E
L
p
P
H
M
g
D
d
b
B
Fig. 8.
A
Q
R
r
P
q
d
C
m
E
b